Klausur am 13.06.2015
zur Linearen Algebra II

Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 90 Minuten. Insgesamt kann man 48 Punkte erreichen. Die Klausur umfaßt 8 Aufgaben zu je 6 Punkten. Die Aufgaben sind aber verschieden schwer.
Geben Sie da, wo es etwas zu rechnen oder zu beweisen gibt, hinreichend viele Zwischenschritte an, so dass ich sehen kann, wie Sie die Aufgaben gelöst haben.
Es sind keine Hilfsmittel erlaubt: Es dürfen weder eigene Aufzeichnungen noch Bücher und auch keine Taschenrechner verwendet werden.

Bitte geben Sie dieses Blatt mit ab. Bitte schreiben Sie auf jedes weitere Blatt, das Sie abgeben, ihren Vor- und Nachnamen und Ihre Matrikelnummer.
Für abgegebene Blätter ohne diese Angaben kann ich keine Punkte vergeben!

Vor- und Nachname:
Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$	Note

Bitte wenden Sie dieses Aufgabenblatt erst auf Aufforderung.

Viel Erfolg!

1. *(6=1+1+1+1+2 Punkte)* In (a) bis (d) ist V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

   (a) Wann heißt eine Abbildung $f : V \to \mathbb{C}$ *semilinear*?

   (b) Wann ist eine Abbildung $\phi : V \times V \to \mathbb{C}$ eine *Sesquilinearform*?

   (c) Wann heißt eine Sesquilinearform ϕ auf V *hermitesch*?

   (d) Wann heißt eine hermitesche Sesquilinearform ϕ auf V *positiv definit*?

   (e) Formulieren Sie den Satz von Cayley und Hamilton.

2. *(6=5+1 Punkte)*

   (a) Führen Sie mit den Zahlen $r_0 = 168$ und $r_1 = 45$ den erweiterten Euklidischen Algorithmus durch, und geben Sie in einer Tabelle die Zahlen r_i, q_i, x_i, y_i mit

$$\begin{aligned} r_{i-2} &= q_{i-1}r_{i-1} + r_i, \\ x_0 = 1,\ x_1 = 0,\ x_i &= x_{i-2} - q_{i-1}x_{i-1} \text{ für } i \geq 2, \\ y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_i &= y_{i-2} - q_{i-1}y_{i-1} \text{ für } i \geq 2, \\ (\text{und deshalb auch } r_i &= x_i r_0 + y_i r_1) \end{aligned}$$

   bis $i = n$ mit $r_{n+1} = 0$ (und $r_n = \mathrm{ggT}(r_0, r_1)$) an. Geben Sie auch n an.

   (b) Wie lautet die Ungleichung, die beim Euklidischen Algorithmus für $\mathbb{Z}$ im Fall $r_0 \in \mathbb{Z}$ und $r_1 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Anzahl n der Iterationsschritte mit der Anzahl der Dezimalstellen von r_1 verbindet?

3. *(6=3+3 Punkte)*

   (a) Sei $m \in \mathbb{N}$. Das m-te Kreisteilungspolynom $\Phi_m(x)$ ist definiert durch

$$\Phi_m = \Phi_m(x) := \prod_{a \in \mathbb{Z}_m^*} (x - e^{2\pi i a/m}) \in \mathbb{C}[x].$$

   Φ_m ist offenbar unitär und erfüllt $\deg \Phi_m = \varphi(m)$. Tatsächlich ist $\Phi_m \in \mathbb{Z}[x]$, und es ist in $\mathbb{Z}[x]$ und in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel. Und die Kreisteilungspolynome lassen sich rekursiv mit folgender Formel berechnen:

$$x^m - 1 = \prod_{d \in \mathbb{N}:\ d|m} \Phi_d.$$

   Berechnen Sie so die Kreisteilungspolynome Φ_4 und Φ_{12}.
   Hinweis: Dafür müssen Sie die Kreisteilungspolynome Φ_1, Φ_2, Φ_3 und Φ_6 nicht ausrechnen (aber Sie dürfen).

   (b) Bestimmen Sie eine Lösung b des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} b &\equiv 4 \bmod 7 \\ b &\equiv 3 \bmod 11 \\ b &\equiv 7 \bmod 13 \end{aligned}$$

   Skizzieren Sie auch Ihren Lösungsweg.

4. *(6=2+4 Punkte)*

   (a) Geben Sie an, wann ein Integritätsring R mit Einselement 1 und Gradfunktion $w : R - \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ ein *Euklidischer Ring* ist.

   (b) Beweisen Sie, dass ein Euklidischer Ring ein Hauptidealring ist.

5. *(6=2+3+1 Punkte)*

   (a) Sei $\alpha \in [0, 2\pi[$. Die Matrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ ist als reelle Matrix diagonalisierbar (das müssen Sie nicht beweisen). Geben Sie (ohne Beweis) eine ON-Basis des $M(2\times 1, \mathbb{R})$ aus Eigenvektoren und die zugehörigen Eigenwerte an.

   (b) Sei V ein 3-dimensionaler Euklidischer Vektorraum. Dann ist V auch ein metrischer Raum. Geben Sie die Namen der 7 Typen von Isometrien von V an, und beschreiben Sie bei allen 7 Typen die Fixpunktmenge (bei einigen ist sie leer).

   (c) Geben Sie in der Situation von (b) ohne Beweis an, von welchen möglichen Typen Kompositionen der Gestalt $Translation \circ (echte\ Drehung)$ und der Gestalt $Translation \circ Spiegelung$ sind.

6. *(6 Punkte)* $P_T \subset M(3 \times 1, \mathbb{R})$ und $P_O \subset M(3 \times 1, \mathbb{R})$ sind ein Tetraeder und ein Oktaeder in $M(3 \times 1, \mathbb{R})$ mit 0 als Mittelpunkt. $\mathrm{Sym}_{or}(P_T) \subset SO(3, \mathbb{R})$ und $\mathrm{Sym}_{or}(P_O) \subset SO(3, \mathbb{R})$ sind die Gruppen der Drehungen des $M(3 \times 1, \mathbb{R})$, die den Tetraeder bzw. den Oktaeder invariant lassen. Jeweils sei

$$X \;:=\; \text{Anzahl der Drehachsen eines Typs,}$$
$$Y \;:=\; \text{Anzahl der Drehungen um Drehachsen eines Typs.}$$

   Die folgende Tabelle sagt einiges über $\mathrm{Sym}_{or}(P_T)$ aus.

   Tetraeder P_T:

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
$-$	$-$	0	(id :) 1
4	durch Ecken und gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$
3	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	$3 \cdot 1 = 3$

   Erstellen Sie eine analoge Tabelle für $\mathrm{Sym}_{or}(P_O)$.

7. *(6=2+4 Punkte)*

   (a) Sei $g \in O(\mathbb{R}^3, \phi_{st})$ (ϕ_{st} ist das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$). Sei $a \in \mathbb{R}^3$, und sei $T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Translation um den Vektor a. Zeigen Sie, dass $g \circ T_a \circ g^{-1}$ eine Translation T_b ist, und bestimmen Sie b.

   (b) Sei $\alpha \in]0, 2\pi[$, und sei d_α die Drehung des $\mathbb{R}^2$ mit 0 als Fixpunkt um den Winkel α. Weiter sei $a \in \mathbb{R}^2$, und T_a sei die Translation um a. Dann ist $T_a \circ d_\alpha$ eine Drehung um den Winkel α und um einen Fixpunkt p. Dass $T_a \circ d_\alpha$ eine Drehung ist, müssen Sie nicht beweisen. Aber Sie sollen den Fixpunkt p bestimmen und eine Skizze und eine kleine Rechnung dazu machen.

8. *(6=2+4 Punkte)*

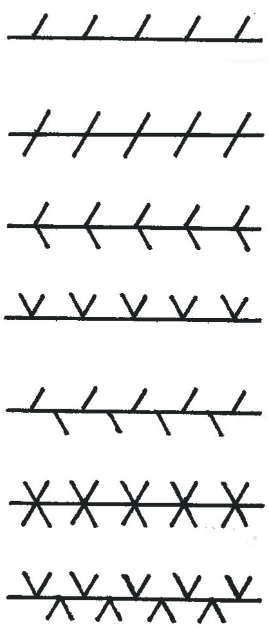
(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wann heißt eine Untergruppe $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_{st})$ (d_{st} ist die durch das Standardskalarprodukt ϕ_{st} induzierte Standardmetrik) *diskret*?

Hinweis: Zwei Eigenschaften. Die zweite Eigenschaft betrifft die Translationsuntergruppe $G \cap \mathrm{Transl}(\mathbb{R}^n)$ und involviert eine Zahl $k \in \{0, 1, ..., n\}$.

(b) Die diskreten Untergruppen im Fall $(n, k) = (2, 1)$ heißen *Friesgruppen.* Es gibt 7 Ähnlichkeitsklassen von Friesgruppen. Sie werden $F_1, F_2, F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_2^1$ und F_2^2 genannt.

Die folgende Tabelle links gibt zu jeder der 7 Klassen einen Ausschnitt eines Frieses, so dass die Symmetriegruppe des Frieses eine Gruppe $\widetilde{F_1}, \widetilde{F_2}, \widetilde{F_1^1}, \widetilde{F_1^2}, \widetilde{F_1^3}, \widetilde{F_2^1}, \widetilde{F_2^2}$ in der Klasse $F_1, F_2, F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_2^1, F_2^2$ ist. Rechts in der Tabelle stehen einige Zusatzinformationen. $\overline{F_2}$ ist eine weitere Friesgruppe in der Klasse F_2.

Das folgende Diagramm rechts gibt einen Algorithmus, mit dem man die Symmetriegruppe eines gegebenen Frieses bestimmen kann.



$\widetilde{F_1} = \{T_{(b,0)} \mid b \in \mathbb{Z}\}$

$\widetilde{F_2} \supset$ {gewisse Drehungen um π}

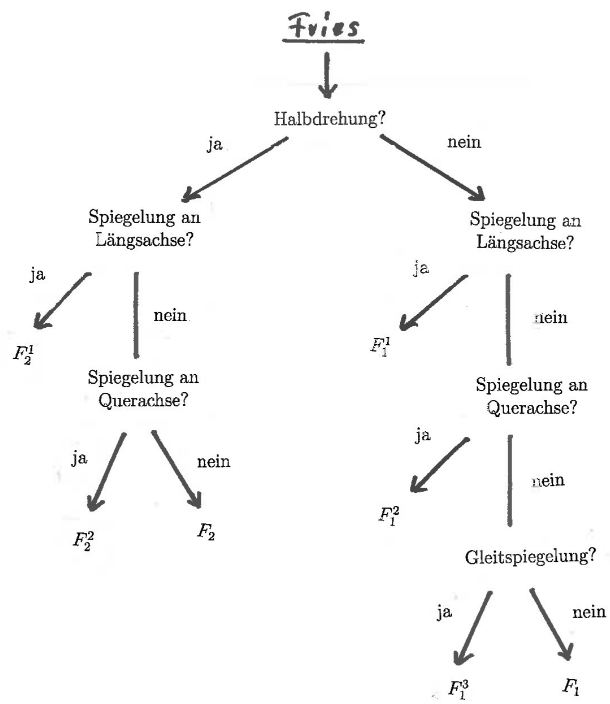
$\widetilde{F_1^1} \supset$ {Spiegelung an einer Längsachse, gewisse Gleitspiegelunge

$\widetilde{F_1^2} \supset$ {Spiegelungen an gewissen Querach

$\widetilde{F_1^3} \supset$ {gewisse Gleitspiegelungen}

$\widetilde{F_2^1} \supset \widetilde{F_1^1} \cup \widetilde{F_1^2} \cup \widetilde{F_2}$

$\widetilde{F_2^2} \supset \widetilde{F_1^2} \cup \overline{F_2} \cup \widetilde{F_1^3}$



Schreiben Sie in der folgenden Tabelle unter jeden Ausschnitt eines Frieses die Klasse der Symmetriegruppe des Frieses.

CCCC	IIIII	LΓLΓ	PPPP	UUUU	VΛVΛ	WWWW	ZZZZ