Lösungen der Klausur am 13.06.2015 zur Linearen Algebra II

1. *(6=1+1+1+1+2 Punkte)*

   (a) $f : V \to \mathbb{C}$ ist semilinear, falls gilt:
   f ist additiv: $f(a+b) = f(a) + f(b)$ für $a, b \in V$;
   f erfüllt: $f(\lambda \cdot a) = \overline{\lambda} \cdot f(a)$ für $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in V$.

   (b) $\phi : V \times V \to \mathbb{C}$ ist eine Sesquilinearform, falls ϕ im linken Argument linear und im rechten Argument semilinear ist.

   (c) ϕ ist hermitesch $\iff_{\text{Def.}}$ für alle $x, y \in V$ gilt $\phi(y, x) = \overline{\phi(x, y)}$.

   (d) ϕ ist positiv definit $\iff_{\text{Def.}}$ für alle $x \in V - \{0\}$ ist $\phi(x, x) > 0$.

   (e) Sei $f : W \to W$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums W mit charakteristischem Polynom $P_f(t)$. Dann ist
   $$P_f(f) = 0 \in \mathrm{End}(W).$$

2. *(6=5+1 Punkte)*

   (a)

$168 = 3 \cdot 45 + 33$	$q_1 = 3$	$r_2 = 33$
$45 = 1 \cdot 33 + 12$	$q_2 = 1$	$r_3 = 12$
$33 = 2 \cdot 12 + 9$	$q_3 = 2$	$r_4 = 9$
$12 = 1 \cdot 9 + 3$	$q_4 = 1$	$r_5 = 3$
$9 = 3 \cdot 3$	$q_5 = 3$	$r_6 = 0$

i	r_i	q_i	x_i	y_i
0	168	–	1	0
1	45	3	0	1
2	33	1	1	-3
3	12	2	-1	4
4	9	1	3	-11
5	3	3	-4	15
6	0	–	$\frac{r_1}{r_5} = 15$	$-\frac{r_0}{r_5} = -56$

   $$\text{also } n = 5, \quad ggT(r_0, r_1) = r_5 = 3.$$

   (b) $n \leq 5 \cdot |\text{Dezimalstellen von } r_1|$.

3. *(6=3+3 Punkte)*

   (a) Es ist $x^4 - 1 = \Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdot \Phi_4$ und $x^2 - 1 = \Phi_1 \cdot \Phi_2$. Daher ist
   $$\Phi_4 = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = x^2 + 1.$$
   Es ist $x^{12} - 1 = \Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdot \Phi_3 \cdot \Phi_4 \cdot \Phi_6 \cdot \Phi_{12}$ und $x^6 - 1 = \Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdot \Phi_3 \cdot \Phi_6$. Daher ist
   $$\begin{aligned} \Phi_4 \cdot \Phi_{12} &= \frac{x^{12} - 1}{x^6 - 1} = x^6 + 1, \\ \Phi_{12} &= \frac{x^6 + 1}{x^2 + 1} = x^4 - x^2 + 1. \end{aligned}$$

(b) Lösungen zu $b \equiv 4 \bmod 7$ sind $4, 11, 18, 25, 32, 39, ...$ Ihre Reste modulo 11 sind $4, 0, 7, 3, 10, 6, ...$ Also ist $b_0 := 25$ eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} b &\equiv 4 \bmod 7 \\ b &\equiv 3 \bmod 11 \end{aligned}$$

Es ist $b_0 \equiv 12 \bmod 13$ und $7 \cdot 11 = 77 \equiv -1 \bmod 13$. Also ist

$$\begin{aligned} b &= 25 + 5 \cdot 77 = 410 \\ \text{mit } b &\equiv 12 + 5 \cdot (-1) = 7 \bmod 13 \end{aligned}$$

eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} b &\equiv 4 \bmod 7 \\ b &\equiv 3 \bmod 11 \\ b &\equiv 7 \bmod 13 \end{aligned}$$

4. *(6=2+4 Punkte)*

(a) Ein Integritätsring R mit Einselement 1 und *Gradfunktion* $w : R - \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist ein *Euklidischer Ring*, wenn Division mit Rest möglich ist, d.h. wenn gilt:

Zu $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ gibt es $q, r \in R$ mit
$a = q \cdot b + r$ und ($r = 0$ oder $w(r) < w(b)$).

(b) **Satz:** Ein Euklidischer Ring ist ein Hauptidealring.

Beweis: Sei R ein Euklidischer Ring mit Gradfunktion $w : R - \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sei $I \subset R$ ein Ideal mit $I \neq \{0\}$. Dann enthält I ein Element $b \neq 0$ mit minimalem $w(b)$.

Behauptung: $I = (b)$.

Beweis der Behauptung und damit des Satzes: Sei $a \in I$. Division mit Rest gibt $a = q \cdot b + r$ mit $r \in I$ und mit $w(r) < w(b)$ oder $r = 0$. Wegen $w(b)$ minimal ist $r = 0$, also $a = q \cdot b \in (b)$. □

5. *(6=2+3+1 Punkte)*

(a) $v_1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ bilden eine ON-Basis aus Eigenvektoren. Die Eigenwerte sind 1 und -1.

(b) Identität: Fixpunktmenge $= V$.
Spiegelungen: Fixpunktmenge = die Ebene, an der gespiegelt wird.
Echte Drehungen: Fixpunktmenge = die Gerade, um die gedreht wird.
Drehspiegelungen: Fixpunktmenge = der Schnittpunkt von Drehachse und Spiegelungsebene.
Translationen: Fixpunktmenge $= \emptyset$.
Gleitspiegelungen: Fixpunktmenge $= \emptyset$.
Schraubungen: Fixpunktmenge $= \emptyset$.

(c)

$$\begin{aligned} \text{Translation} \circ (\text{echte Drehung}) &\in \{\text{echte Drehungen}\} \cup \{\text{Schraubungen}\}, \\ \text{Translation} \circ \text{Spiegelung} &\in \{\text{Spiegelungen}\} \cup \{\text{Gleitspiegelungen}\}. \end{aligned}$$

6. *(6 Punkte)*

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
$-$	$-$	0	(id :) 1
3	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$	$3 \cdot 3 = 9$
6	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	$6 \cdot 1 = 6$
4	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$

7. *(6=2+4 Punkte)*

(a)

$$(g \circ T_a \circ g^{-1})(x) = g(T_a(g^{-1}(x))) = g(g^{-1}(x) + a) = x + g(a) = T_{g(a)}(x),$$

also ist $g \circ T_a \circ g^{-1} = T_{g(a)}$.

(b) Sei $e_1 := a/\|a\|$ und $e_2 := d_{\pi/2}(e_1)$. Dann ist (e_1, e_2) eine orientierte ON-Basis des $\mathbb{R}^2$.

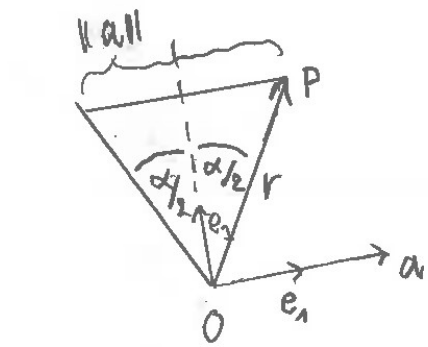
$$p := \frac{\|a\|}{2}(e_1 + \cot\frac{\alpha}{2} \cdot e_2) = r \sin\frac{\alpha}{2} \cdot e_1 + r\cos\frac{\alpha}{2} \cdot e_2 \quad \text{mit} \quad r := \frac{\|a\|/2}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

ist ein Fixpunkt von f ist.

Kurze Rechnung:

$$\begin{aligned} q &:= p - a = \frac{\|a\|}{2}(-e_1 + \cot\frac{\alpha}{2} \cdot e_2), \\ (T_a \circ d_\alpha)(p) &= T_a(q) = q + a = p. \end{aligned}$$

Skizze:



8. *(6=2+4 Punkte)*

(a) Eine Untergruppe $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_{st})$ heißt *diskret*, falls das Bild $\Psi(G)$ unter der Abbildung

$$\Psi : \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_{st}) \to O(\mathbb{R}^n, \phi_{st}),\ \ f \mapsto g := T_{-f(0)} \circ f,$$

endlich ist und falls die Translationsuntergruppe $G \cap \mathrm{Transl}(\mathbb{R}^n)$ von den Translationen um Vektoren $a_1, ..., a_k$ mit $0 \leq k \leq n$ erzeugt wird, wobei $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind.

(b) .

CCCC	IIIII	LΓLΓ	PPPP	UUUU	⋁⋀⋁⋀	W W W W	ZZZZ
F_1^1	F_2^1	F_1^3	F_1	F_1^2	F_2^2	F_1^2	F_2