Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb

1. *(4=3+1 Punkte)* Die Gruppe der Isometrien der Euklidischen Geraden $(\mathbb{R}, \phi_{st})$ ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Isom}(\mathbb{R}, \phi_{st}) &= \mathrm{Transl}(\mathbb{R}) \rtimes O(\mathbb{R}, \phi_{st}) = \mathrm{Transl}(\mathbb{R}) \rtimes \{\mathrm{id}, s_0\} \\ &= \{\text{Translationen}\} \cup \{\text{Spiegelungen}\} = \{T_a \,|\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{s_b \,|\, b \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Hier ist T_a die Translation um a, also $T_a(x) = x + a$, und s_b ist die Spiegelung am Punkt b.

(a) Ersetzen Sie in den folgenden Formeln die Fragezeichen durch die richtigen Formeln.

$$\begin{aligned} s_b(x) &= ?, \quad s_b \circ T_a = s_?, \\ T_a \circ s_b &= s_?, \quad T_a \circ s_b = T_c \circ s_d \iff ? = ?, \\ s_b \circ T_a \circ s_b &= T_?, \quad T_a \circ s_b \circ T_{-a} = s_?. \end{aligned}$$

(b) Die Gleichung $s_b \circ T_a \circ s_b = T_?$ sagt (unabhängig von der richtigen Formel in ?), dass die Untergruppe $\{T_a \,|\, a \in \mathbb{R}\}$ von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}, \phi_{st})$ ein Normalteiler ist. Sagt die Formel $T_a \circ s_b \circ T_{-a} = s_?$, dass $\{s_b \,|\, b \in \mathbb{R}\}$ ein Normalteiler von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}, \phi_{st})$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. *(6=2+2+2 Punkte)* Aufgabe 2 und Aufgabe 3 eilen der Vorlesung voraus. Daher beginnen sie mit Definitionen und Sätzen.

Definition: (a) Eine Untergruppe $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \phi_{st})$ heißt *diskret*, falls das Bild $\Psi(G)$ unter der Abbildung

$$\Psi : \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \phi_{st}) \to O(\mathbb{R}^n, \phi_{st}), \ f \mapsto g := T_{-f(0)} \circ f$$

endlich ist und falls die Translationsuntergruppe $G \cap \mathrm{Transl}(\mathbb{R}^n)$ von den Translationen um Vektoren $a_1, ..., a_k$ mit $0 \le k \le n$ erzeugt wird, wobei $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind.

(b) Zwei diskrete Untergruppen G_1 und G_2 von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \phi_{st})$ heißen ähnlich, falls es eine Affinität (Definition 15.4 (c)) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$G_2 = \{A^{-1} \circ g \circ A \,|\, g \in G_1\}$$

gibt. Ähnlichkeit ist offenbar eine Äquivalenzrelation.

(c) Die diskreten Untergruppen im Fall $(n, k) = (2, 1)$ heißen *Friesgruppen*.

(d) Ein *Fries* ist eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^2$, so dass $\{f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, \phi_{st}) \,|\, f(M) = M\}$ eine Friesgruppe ist. Sie ist die *Symmetriegruppe* des Frieses.

(e) Die diskreten Untergruppen im Fall $(n,k) = (n,n)$ heißen (für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$) *kristallographische Raumgruppen.* Im Fall $(n,k) = (2,2)$ heißen sie auch *Ornamentgruppen.*

Satz: *(a) Es gibt 7 Ähnlichkeitsklassen von Friesgruppen. Sie werden* $F_1, F_2, F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_2^1$ *und* F_2^2 *genannt.*

(b) Die folgende Tabelle gibt zu jeder der 7 Klassen einen Ausschnitt eines Frieses, so dass die Symmetriegruppe des Frieses eine Gruppe $\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2, \widetilde{F}_1^1, \widetilde{F}_1^2, \widetilde{F}_1^3, \widetilde{F}_2^1, \widetilde{F}_2^2$ *in der Klasse* $F_1, F_2, F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_2^1, F_2^2$ *ist. Hier ist* $\widetilde{F}_1 = \{T_{(b,0)} \,|\, b \in \mathbb{Z}\}$, *und* $\widetilde{F}_1$ *ist die Translationsuntergruppe der anderen 6 Gruppen. Rechts in der Tabelle stehen einige Zusatzinformationen.* $\overline{F}_2$ *ist eine weitere Friesgruppe in der Klasse* F_2, *bei der die Drehpunkte gegenüber der Gruppe* $\widetilde{F}_2$ *entlang der Längsachse um* $\frac{1}{4}$ *(z.B. nach rechts) verschoben sind.*

$\widetilde{F}_1 = \{T_{(b,0)} \,|\, b \in \mathbb{Z}\}$

$\widetilde{F}_2 \supset$ {gewisse Drehungen um π}

$\widetilde{F}_1^1 \supset$ {Spiegelung an einer Längsachse, gewisse Gleitspiegelungen}

$\widetilde{F}_1^2 \supset$ {Spiegelungen an gewissen Querachsen}

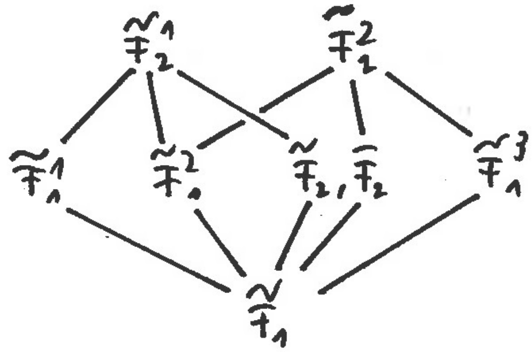
$\widetilde{F}_1^3 \supset$ {gewisse Gleitspiegelungen}

$\widetilde{F}_2^1 \supset \widetilde{F}_1^1 \cup \widetilde{F}_1^2 \cup \widetilde{F}_2$

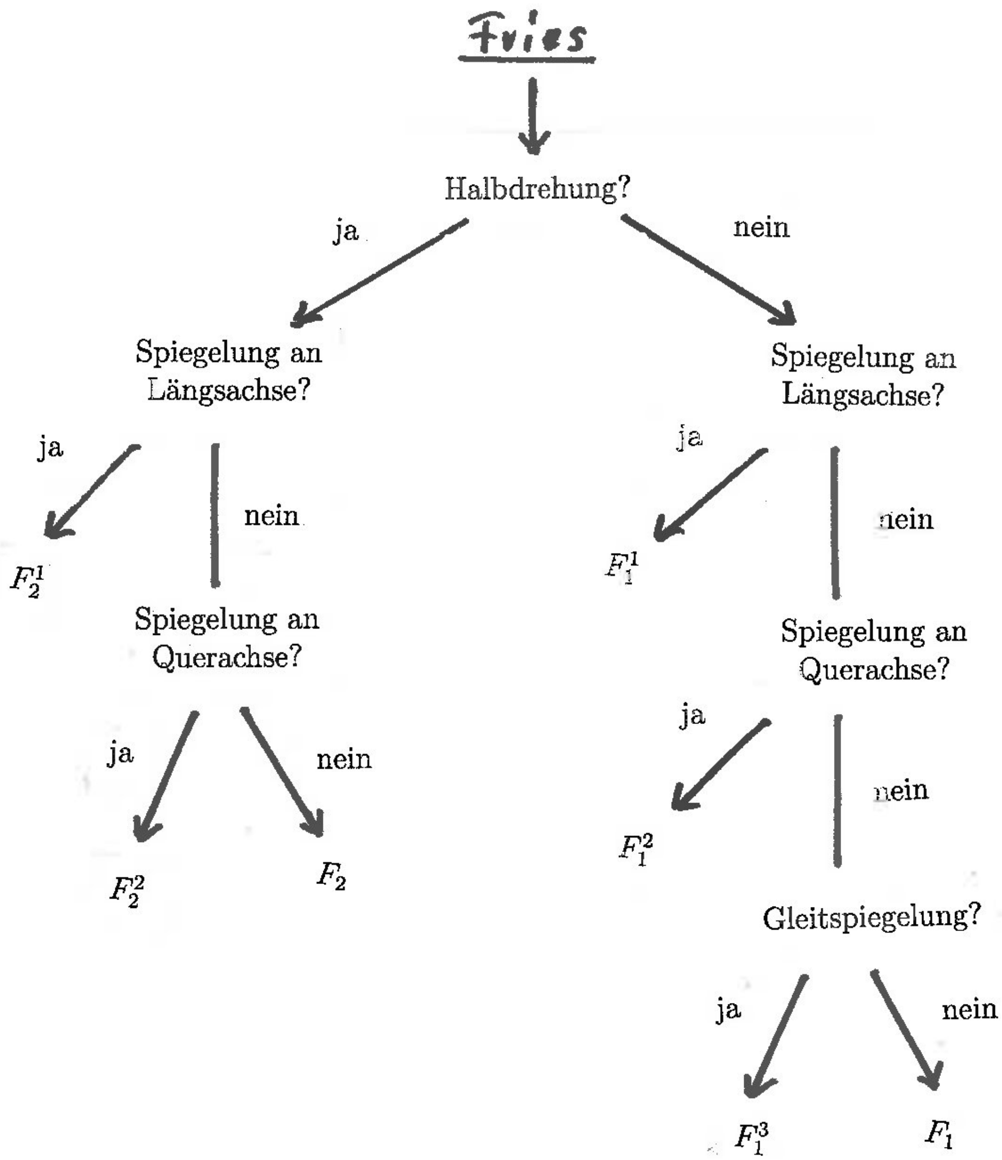
$\widetilde{F}_2^2 \supset \widetilde{F}_1^2 \cup \overline{F}_2 \cup \widetilde{F}_1^3$

(c) Die 8 Gruppen $\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2, \widetilde{F}_1^1, \widetilde{F}_1^2, \widetilde{F}_1^3, \widetilde{F}_2^1, \widetilde{F}_2^2$ *und* $\overline{F}_2$ *in (b) erfüllen die Untergruppenbeziehungen im folgenden Diagramm. Hier ist eine untere Gruppe in einer oberen Gruppe enthalten, wenn eine oder zwei (zwei nur bei* $\widetilde{F}_1 \subset \widetilde{F}_2^1, \widetilde{F}_1 \subset \widetilde{F}_2^2$*)*

Kanten sie verbindet. Die untere Gruppe ist dann ein Normalteiler in der oberen Gruppe, und die Quotientengruppe hat 2 (bei 1 Kante) bzw. 4 (bei 2 Kanten) Elemente.



(d) Das folgende Diagramm gibt einen Algorithmus, mit dem man die Symmetriegruppe eines gegebenen Frieses bestimmen kann.



(e) Die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen von kristallographischen Raumgruppen wird in den Fällen $n = 2, 3, 4, 5, 6$ in der folgenden Tabelle gegeben.

n	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
	17	*219*	*4783*	*222018*	*28927915*

Beispiele: Wiederholung des Buchstaben A gibt ein Fries ...AAAAAAAAA... mit Symmetriegruppe in der Klasse von F_1^2. Wiederholung des Buchstaben Z gibt ein Fries ...ZZZZZZZZZ... mit Symmetriegruppe in der Klasse von F_2.

(i) Geben Sie (ohne Begründung) die Symmetriegruppen der Friese an, die man jeweils durch Wiederholung eines der folgenden Großbuchstaben erhält: D, G, K, N, Q, S, V, X.

(ii) Geben Sie (ohne Begründung) die Symmetriegruppen der Friese an, von denen die folgenden Bilder Ausschnitte zeigen.

B1

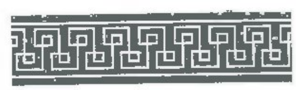

B2


B3


B4


B5


B6

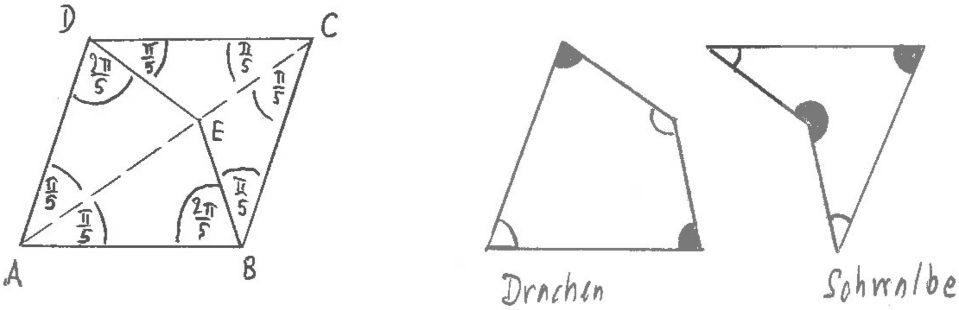

B7


B8


(iii) Sie haben einen Stempel mit dem Stempelabdruck $\bigvee$ zur Verfügung. Stellen Sie zu möglichst vielen (Klassen von) Friesgruppen Ausschnitte von Friesen her, deren Symmetriegruppe die Friesgruppe ist. Falls Sie zu einigen Friesgruppen keine Friese herstellen können, erklären Sie, warum nicht.

3. *(6=1+1+1+3 Punkte)*

Eine *Penrose-Pflasterung* ist eine Überdeckung der Ebene $\mathbb{R}^2$ durch unendlich viele *Penrose-Fliesen*, wobei die Fliesen sich nur in ihrem Rand schneiden dürfen und nur Ecken gleicher Farbe (schwarz oder weiß, siehe unten) aneinanderstoßen dürfen. Es gibt zwei Typen von Penrose-Fliesen. Für ihre Konstruktion startet man mit einem Parallelogramm mit Ecken A, B, C, D (bei mathematisch positivem Umlauf) mit allen Seitenlängen gleich $g := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = goldener Schnitt, und mit Winkeln $\measuredangle(BAD) = \measuredangle(DCB) = \frac{2\pi}{5}$ und $\measuredangle(CBA) = \measuredangle(ADC) = \frac{3\pi}{5}$, siehe die Skizze links. Der Punkt E wird auf der Strecke $\overline{AC}$ so gewählt, dass $\measuredangle(EBA) = \frac{2\pi}{5} = \measuredangle(ADE) = \frac{2\pi}{5}$ und $\measuredangle(CBE) = \measuredangle(EDC) = \frac{\pi}{5}$ ist.



Die Penrose-Fliese *Drachen* ist das (konvexe) Viereck $(ABED)$ mit den schwarzen Ecken B und D und den weißen Ecken A und C. Die Penrose-Fliese *Schwalbe* ist das (nicht konvexe) Viereck $(BCDE)$ mit den schwarzen Ecken E und C und den weißen Ecken B und D.

Satz: *(Penrose 73)*

(a) Es gibt Penrose-Pflasterungen, sogar überabzählbar viele (unten ist ein Ausschnitt eines Beispiels).

(b) Jeder endliche Teil einer Penrose-Pflasterung tritt bei jeder *Penrose-Pflasterung uendlich oft auf. Insbesondere kann man zwei verschiedene Penrose-Pflasterungen nicht mit Hilfe von endlichen Teilen unterscheiden.*

(c) Wenn man eine Folge von Kreisen K_n im $\mathbb{R}^2$ mit Radien r_n mit $r_n \to_{n\to\infty} \infty$ betrachtet, gilt

$$\frac{|\{\text{Drachen ganz in } K_n\}|}{|\{\text{Schwalben ganz in } K_n\}|} \mapsto_{n\to\infty} g.$$

(d) Es gibt keine Translation ($\neq T_0 = \mathrm{id}$), die die Menge der Ecken und Kanten einer Penrose-Pflasterung auf sich abbildet, d.h. jede Penrose-Pflasterung ist nichtperiodisch.

(e) (Penrose+Conway) **Vergröberung:** *Man erhält auf folgende Weise aus einer Penrose-Pflasterung eine neue Penrose-Pflasterung mit neuen Fliesen, die um den Faktor g größer sind als die alten Fliesen: Jede Schwalbe wird durch einen Schnitt von einer zur anderen schwarzen Ecke in zwei Dreiecke geteilt. Die dabei entstandenen Kanten werden* neu *genannt. Alle Drachen und/oder Dreiecke, die eine nicht neue kurze Kante gemeinsam haben, werden entlang dieser Kante verklebt.*

Verfeinerung: *Es gibt ein analoges Rezept, das eine* Verfeinerung *einer Penrose-Pflasterung liefert.*

(f) Es gibt genau zwei Penrose-Pflasterungen, bei denen es eine Untergruppe von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, \phi_{st})$ der Ordnung 5 von Drehungen gibt, die die Penrose-Pflasterung auf sich abbilden. Durch Vergröberung (und auch durch Verfeinerung) gehen sie in einander über.

(i) Zeigen Sie beim Parallelogramm oben $d(E, C) = d(E, B) = d(E, D) = 1$. Hinweis: $2 \cos \frac{\pi}{5} = g$ (das müssen Sie nicht zeigen).

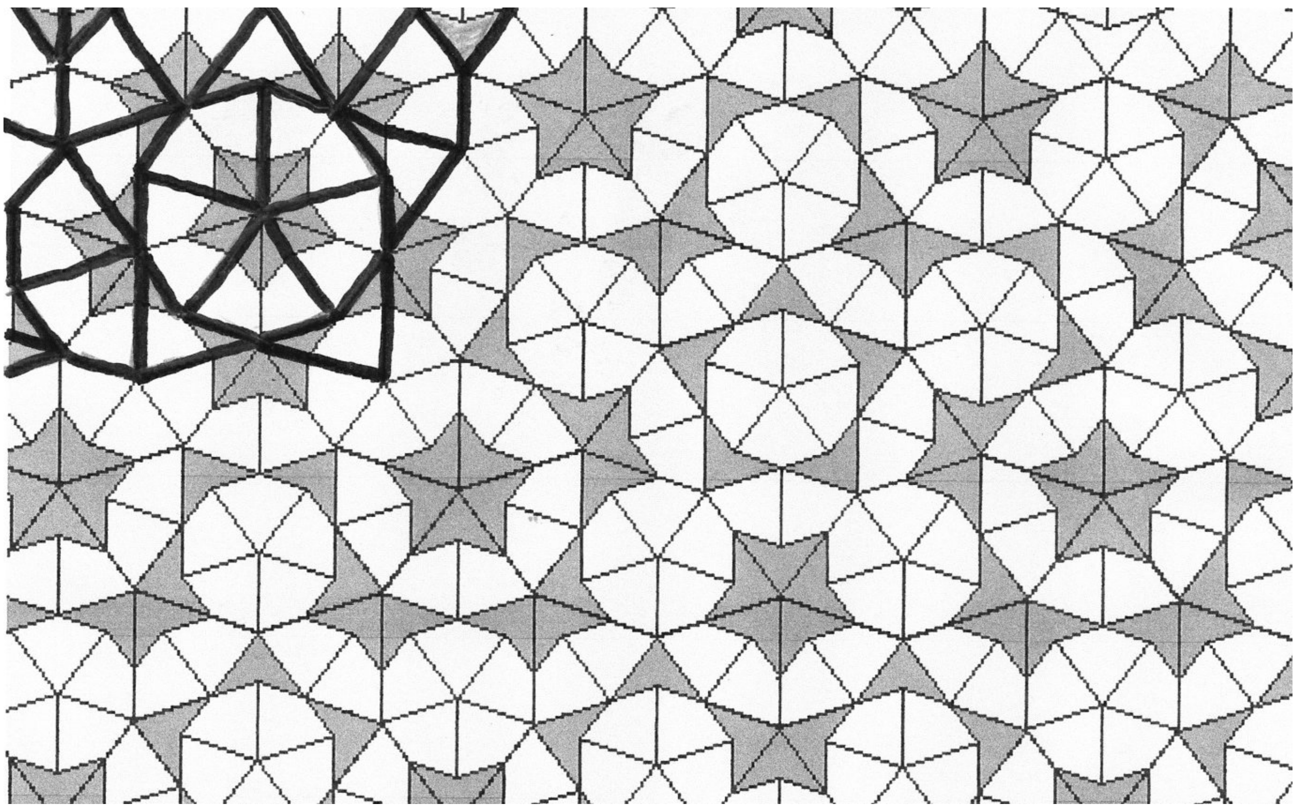
(ii) Zeigen Sie

$$\frac{\text{Fläche des Drachen}}{\text{Fläche der Schwalbe}} = g.$$

Bemerkung: Es ist nicht verlangt, die beiden Flächen auszurechnen.

(iii) Aus (e) folgt (d). Verstehen und erklären Sie, wie (d) aus (e) folgt.

(iv) Das Bild unten ist ein Ausschnitt einer Penrose-Pflasterung. Links oben sind die Kanten der Vergröberung in (e) eingezeichnet. Vervollständigen Sie das, d.h. zeichnen Sie alle Kanten der Vergröberung ein. Bemerkung: Da man sich leicht vertut, ist es sinnvoll, die Kanten mit Bleistift vorzuzeichnen und dann mit einem besser sichtbaren Stift nachzuzeichnen.



Abgabe bis Freitag, den 22. Mai 2015, um 11:50 Uhr im Kasten zu LA IIb im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5. Die Lösungen werden in den Vorlesungen am 22. und 29. Mai besprochen.