Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb

1. *(6=1+2+2+1 Punkte)* **Definition:** Das *Vektorprodukt* $a \times b$ von zwei Vektoren $a = (a_1, a_2, a_3)$ und $b = (b_1, b_2, b_3)$ im $\mathbb{R}^3$ $(= M(1 \times 3, \mathbb{R}))$ ist

$$a \times b := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \in \mathbb{R}^3.$$

Offensichtlich gilt für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$

$$(a \times b) \cdot c^{tr} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b \times c) \cdot a^{tr} = (c \times a) \cdot b^{tr}.$$

Satz: *Sei ϕ_{st} das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$, und seien $a, b \in \mathbb{R}^3$.*

(a) Es ist $\phi_{st}(a \times b, a) = \phi_{st}(a \times b, b) = 0$.

(b) Es ist $a \times b = 0$ falls $a = 0$ oder $b = 0$ ist. Im Fall $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt

$$\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \measuredangle(a, b).$$

(c) Falls a und b linear unabhängig sind, ist $(a, b, a \times b)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Dann hat die Basiswechselmatrix $M(\mathcal{E}, (a, b, a \times b))$ eine positive Determinante, d.h. die Basis $a, b, a \times b$ hat die gleiche Orientierung wie die Standardbasis $\mathcal{E} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

(d) Durch die Eigenschaften in (a)–(c) ist $a \times b$ eindeutig bestimmt.

Beweisen Sie diesen Satz.

2. *(2 Punkte)* Benutzen Sie das Vektorprodukt, um ohne Zeilenumformungen oder andere bekannte Methoden, lineare Gleichungssysteme zu lösen, direkt eine Lösung ungleich 0 des linearen homogenen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hinzuschreiben.

Bitte wenden !!!

3. *(3=1+1+1 Punkte)* **Definition:** Eine *affin lineare Abbildung*

$$f : M(n \times 1, K) \to M(m \times 1, K)$$

ist eine Abbildung der Gestalt

$$f(x) = B \cdot x + b \quad \text{mit geeigneten } B \in M(m \times n, K),\ b \in M(m \times 1, K).$$

(a) Schreiben Sie $\begin{pmatrix} f(x) \\ 1 \end{pmatrix} \in M((m+1) \times 1, K)$ als Produkt einer geeigneten Matrix mit $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in M((n+1) \times 1, K)$.

(b) Sei $g : M(m \times 1, K) \to M(l \times 1, K)$ eine affine Abbildung mit $g(y) = C \cdot y + c$ mit $C \in M(l \times m, K),\ c \in M(l \times 1, K)$. Schreiben Sie $(g \circ f)(x)$ auch in solcher Gestalt (d.h. als Summe eines linearen und eines konstanten Terms).

(c) Schreiben Sie $\begin{pmatrix} (g \circ f)(x) \\ 1 \end{pmatrix} \in M((l+1) \times 1, K)$ als Produkt von 2 geeigneten Matrizen mit $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. *(5 Punkte)* **Definition:** Ein *Dreieckspolytop* ist ein Polytop (d.h. ein kompaktes konvexes Polyeder mit inneren Punkten), so dass alle Flächen in seinem Rand reguläre (d.h. gleichseitige) Dreiecke sind. (Dann sind automatisch alle Kanten gleich lang.)

Satz: *Es gibt nach Wahl der Kantenlänge bis auf Drehungen und Verschiebungen genau 8 Dreieckspolytope.*

3 der 8 Dreieckspolytope kennen Sie schon: das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder. Von den anderen 5 sind 2 leicht zu raten, 2 sind mittelschwer und eins ist schwer zu finden.

Raten Sie die anderen 5 Dreieckspolytope und beschreiben Sie sie durch eine Mischung aus Skizzen und Text hinreichend genau. Existenz und/oder Eindeutigkeit müssen Sie nicht beweisen.

Abgabe bis Freitag, den 15. Mai 2015, um 11:50 Uhr im Kasten zu LA IIb im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5