Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb

1. *(4=1+2+1 Punkte)*

   (a) Geben Sie eine Charakterisierung dafür an, dass eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ *unitär* ist, bei der A^{-1} nicht hingeschrieben wird und nicht explizit gesagt wird, dass A invertierbar ist. Bemerkung: Es gibt mehrere Lösungen.

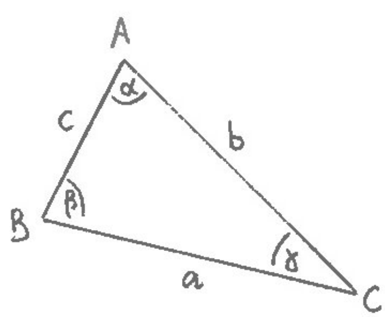
   (b) Formulieren Sie den *Spektralsatz für orthogonale Automorphismen*.

   (c) Definieren Sie, was ein *Platonischer Körper* ist.

2. *(2 Punkte)* Die Seitenlängen in einem Dreieck in der Euklidischen Ebene werden a, b und c genannt. Beweisen Sie die Dreiecksungleichung $a \leq b + c$. Benutzen Sie dabei die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Benutzen Sie nicht die Dreiecksungleichung für die Norm oder die Dreiecksungleichung für die Metrik (die letzte sollen Sie gerade beweisen).

   Bemerkung: Ja, der Beweis war in LA I ausgeführt worden. Sie sollen ihn sich in dieser Aufgabe noch einmal vor Augen führen. Damals war er in zwei Schritten ausgeführt worden, erst die Dreiecksungleichung für die Norm, dann die Dreiecksungleichung für die Metrik. Das können Sie hier etwas kürzer gestalten.

3. *(2 Punkte)* Gegeben ist ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ mit Ecken A, B und C in der Euklidischen Ebene. Die Innenwinkel an den Ecken werden α, β und γ genannt. Die Längen der jeweils gegenüber liegenden Kanten werden a, b und c genannt.



   Beweisen Sie den *Sinussatz*:

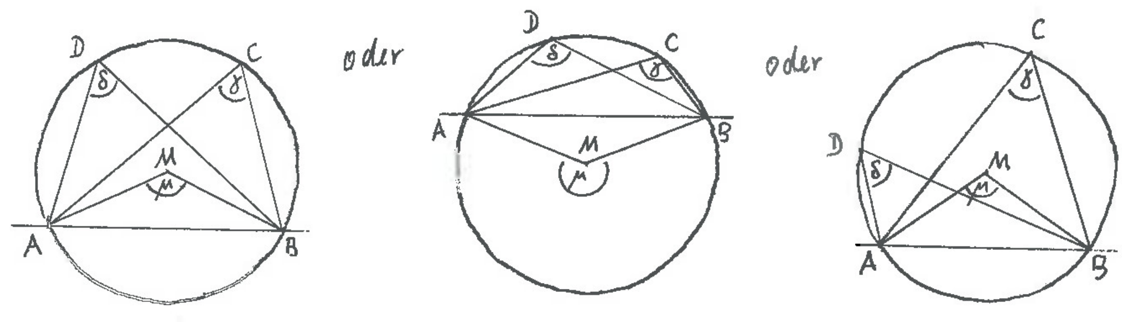
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Bitte wenden !!!

4. *(2 Punkte)* Sei A ein Ikosaeder mit Kantenlängen 1 im 3-dimensionalen Euklidischen Raum. An jeder Ecke wird mit einem Schnitt ein Stück abgeschnitten, so dass der Schnitt die 5 von der Ecke ausgehenden Kanten in den Punkten mit Abstand 1/3 zur Ecke durchschneidet. Man erhält ein Polytop, dessen Rand aus 12 regulären 5-Ecken und 20 regulären 6-Ecken besteht und dessen Kanten alle die Länge 1/3 haben.

   Geben Sie (ohne Beweis) die Zahlen e, k, f, die Paare (i, e_i) mit $e_i \neq 0$ und die Paare (j, f_j) mit $f_j \neq 0$ an. Schreiben Sie die Gleichungen $2 = e - k + f$ und $2k = \sum_i ie_i = \sum_j jf_j$ mit den konkreten Zahlenwerten hin.

5. *(3 Punkte)* Beweisen Sie den *Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel*:



   In der Euklidischen Ebene sind ein Kreis S mit Mittelpunkt M und eine Gerade G gegeben, die sich in 2 Punkten A und B schneiden. Seien C und D ein dritter und ein vierter Punkt auf S, so dass man, wenn man mathematisch positiv auf S entlangläuft und in A startet, erst B, dann C, dann D und dann wieder A trifft. Sei

   $$\mu := \measuredangle(AMB), \quad \gamma := \measuredangle(ACB), \quad \delta := \measuredangle(ADB) :$$

   Dann gilt

   $$\mu = 2\gamma \text{ und } \gamma = \delta.$$

6. *(3 Punkte)* (**Satz von Sylvester und Gallei (1893 und 1944)**) Seien $n \geq 3$ Punkte in der Ebene gegeben, die nicht kollinear sind (d.h. die nicht alle auf einer Geraden liegen). Beweisen Sie, dass eine Gerade existiert, auf der genau zwei dieser Punkte liegen.

   Hinweis: Betrachten Sie unter allen Paaren (P, G), bestehend aus einem der n Punkte P und einer durch mindestens zwei Punkte der Konfiguration verlaufenden Geraden G mit $P \notin G$ dasjenige Paar (P_0, G_0), für welches P_0 minimalen positiven Abstand zu G_0 hat.

   Bemerkung: Ohne diesen Hinweis ist die Aufgabe sehr schwer.

Abgabe bis Freitag, den 08. Mai 2015, um 11:50 Uhr im Kasten zu LA IIb im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5