Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb

1. *(5=2+3 Punkte)* Lemma 14.13 sagt insbesondere, dass es für jeden orthogonalen Automorphismus $f \in O(V,\phi)$ eines 3-dimensionalen Euklidischen Vektorraums V mit Skalarprodukt ϕ nur zwei Möglichkeiten gibt:

   (i) Entweder ist f eine Drehung $d_{v,\alpha}$ um eine Achse $\mathbb{R}\cdot v$ mit $v \in \mathrm{Eig}(f,1)-\{0\}$. Hier bezeichnet $\alpha \in [0,2\pi)$ den Drehwinkel der Drehung um die orientierte Drehachse $\mathbb{R}\cdot v$ mit der Orientierung gegeben durch v: Rechte Hand-Regel.

   (ii) Oder f ist eine Drehspiegelung $f = s_E \circ d_{v,\alpha} = d_{v,\alpha} \circ s_E$ mit

   $$V = \mathbb{R}\cdot v \oplus E,\ \mathrm{Eig}(f,-1) = \mathbb{R}\cdot v,\ E = (\mathbb{R}\cdot v)^\perp.$$

   Hier ist s_E die Spiegelung an der Ebene E, also $E = \mathrm{Eig}(s_E,1)$, $\mathbb{R}\cdot v = \mathrm{Eig}(s_E,-1)$.

   Die Logik in der Vorlesung war

   Satz 14.10(a) $\Rightarrow$ Satz 14.10(b)$\Rightarrow$ Satz 14.11(a) $\Rightarrow$ Satz 14.11(b)$\Rightarrow$ Lemma 14.13.

   Tatsächlich kommt man viel schneller an die Aussagen von Lemma 14.13. Das soll in dieser Aufgabe ausgeführt werden. Sei $f \in O(V,\phi)$.

   (a) Aus Beispiel 14.5 (i) und Satz 14.3 (c) folgt $\det f = \pm 1$ (das müssen Sie nicht beweisen). Zeigen Sie, dass $\det f$ ein Eigenwert von f ist.
   Hinweise: Das charakteristische Polynom $p_f(t)$ hat Koeffizienten in $\mathbb{R}$ und Grad 3, also hat es eine reelle und 2 konjugiert komplexe Nullstellen, oder es hat 3 reelle Nullstellen. Warum haben alle (automatisch reellen) Eigenwerte von f den Betrag 1?

   (b) Zeigen Sie im Fall $\det f = 1$, dass f eine Drehung ist. Zeigen Sie im Fall $\det f = -1$, dass f eine Drehspiegelung ist.
   Hinweise: Man wählt einen normierten Eigenvektor $v \in \mathrm{Eig}(f,\det f)-\{0\}$. Zeigen Sie, dass f die orthogonale Ebene $E := \mathrm{Eig}(f,\det f)^\perp$ auf sich abbildet und dass f diese Ebene dreht.
   Es ist nützlich, am Ende die Matrix $M(\mathcal{B},f,\mathcal{B})$ anzugeben, wobei $b_1 = v$ ist und b_2, b_3 eine ON-Basis von E ist.

2. *(6=2+2+2 Punkte)* Aufgabe 2 ist ein Beispiel zu Aufgabe 1.

   Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

   $$B = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3\times 3,\mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix B orthogonal ist und die Determinante 1 hat.

(b) Nach Lemma 14.13 beschreibt sie daher eine Drehung. Wegen $B \neq E_3$ ist es eine „echte“ Drehung um einen Winkel $\alpha \neq 0$ und mit eindeutiger Drehachse $\mathbb{R} \cdot c_1$, wobei c_1 ein normierter Eigenvektor von B zum Eigenwert 1 ist.

Bestimmen Sie eine ON-Basis (c_1, c_2, c_3) von $M(3 \times 1, \mathbb{R})$, so dass c_1 ein Eigenvektor von B mit Eigenwert 1 ist und c_2 und c_3 die dazu orthogonale Ebene aufspannen und so dass die orthogonale Matrix $T \in O(3, \mathbb{R})$ mit Spalten c_1, c_2, c_3 Determinante 1 hat, also in $SO(3, \mathbb{R})$ liegt.

(c) Berechnen Sie $T^{-1} \cdot B \cdot T$ und geben Sie $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ des Drehwinkels α an.

Bemerkungen: Es ist $T^{-1} = T^{tr}$ (hier müssen Sie also keine inverse Matrix ausrechnen). Der Winkel α selber ist nicht leicht angebbar, Sie sollen nur $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ angeben.

3. *(5=3+2 Punkte)*

(a) Zeigen Sie: Ist $A \in O(2, \mathbb{R})$, so ist

$$B := \begin{pmatrix} \begin{matrix} & A & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \; 0 & \det A \end{pmatrix} \in SO(3, \mathbb{R}).$$

Beschreibt A eine Drehung um einen Winkel α, so beschreibt B eine Drehung an der Drehachse $\mathbb{R} \cdot e_3$ um den Winkel α. Beschreibt A eine Spiegelung an der Achse $c_1 e_1 + c_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$ (mit $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$), so beschreibt B eine Drehung an der Drehachse $c_1 e_1 + c_2 e_2 \in \mathbb{R}^3$ um den Winkel π.

(b) Ist $G \subset O(2, \mathbb{R})$ eine Untergruppe, so ist

$$\widetilde{G} := \{ B := \begin{pmatrix} \begin{matrix} & A & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \; 0 & \det A \end{pmatrix} \mid A \in G \}$$

eine Untergruppe von $SO(3, \mathbb{R})$ und als Gruppe isomorph zu G.

Abgabe bis Donnerstag, den 30. April 2015, um 11:50 Uhr im Kasten zu LA IIb im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5