

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb

1. (4 Punkte) Sei V ein 2-dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ . Die Gruppe $O(V, \phi)$ der orthogonalen Automorphismen besteht aus den Drehungen um 0 und den Spiegelungen an Geraden durch 0,

$$\begin{aligned} d_\alpha &:= \text{Drehung um den Winkel } \alpha, \\ s_v &:= \text{Spiegelung an der Geraden durch } v \in V - \{0\}. \end{aligned}$$

Als Menge ist $O(V, \phi)$ isomorph zu $S^1 \times \{\pm 1\}$, aber als Gruppe nicht. Vielmehr ist sie ein *semidirektes Produkt* (Definition nicht hier) der Gruppen S^1 und $\{\pm 1\}$. Drehungen und Spiegelungen kommutieren nicht, sondern es gilt

$$d_\alpha \circ s_v \circ d_\alpha^{-1} = s_{d_\alpha(v)}.$$

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle zur Gruppenstruktur von $O(V, \phi)$. Der Winkel zwischen w und v soll γ genannt werden (also ist $-\gamma$ der Winkel zwischen v und w).

\circ	d_β	s_w
d_α	$d_\alpha \circ d_\beta = d_{\alpha+\beta}$	$d_\alpha \circ s_w = s_{\dots}$
s_v	$s_v \circ d_\beta = s_{\dots}$	$s_v \circ s_w = d_{\dots}$

Machen Sie zu den 3 Fällen $s_v \circ d_\beta = s_{\dots}$, $d_\alpha \circ s_w = s_{\dots}$ und $s_v \circ s_w = d_{\dots}$ je eine Skizze und beweisen Sie Ihre Formel auf der rechten Seite.

Hinweis: Der Beweis muß natürlich benutzen, wie Drehungen und Spiegelungen charakterisiert sind. Unter anderem ist $\det d_\alpha = 1$, $\det s_v = -1$, und s_v hat v als Eigenvektor mit Eigenwert 1 (und einen orthogonalen Vektor als Eigenvektor mit Eigenwert -1).

2. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass es eindeutige reelle Zahlen $a, b, c, d, e, f, g, h, j$ mit $c, d, j > 0$ gibt, so dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & d & h \\ \frac{2}{3} & a & e & 0 \\ \frac{2}{3} & b & f & j \\ 0 & c & g & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

eine orthogonale Matrix ist, und bestimmen Sie diese Zahlen.

3. (4 Punkte) Beweisen Sie, dass folgende Abbildung eine Bijektion ist:

$$\left\{ (\alpha, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \mid \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], \zeta_i \in S^1, \begin{array}{l} \zeta_2 = 1 \text{ für } \alpha = 0, \\ \zeta_1 = 1 \text{ für } \alpha = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \longrightarrow U(2)$$

$$(\alpha, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \mapsto \begin{pmatrix} \zeta_1 \cos \alpha & -\zeta_3 \zeta_1 \sin \alpha \\ \zeta_2 \sin \alpha & \zeta_3 \zeta_2 \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Hinweis: Wenn man die Spaltenvektoren einer unitären 2×2 -Matrix a_1 und a_2 nennt, kann man zuerst die Absolutwerte der Einträge von a_1 behandeln (es ist $\|a_1\| = 1$), und dann die von a_2 (es ist $\|a_2\| = 1$ und $\langle a_1, a_2 \rangle = 0$). Danach können dann die komplexen Phasen der Einträge diskutiert werden.

4. (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\widetilde{SU(1,1)} := \left\{ B \in SL(2, \mathbb{C}) \mid B^{tr} \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \cdot \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\} = SL(2, \mathbb{R}).$$

(b) Ist die Menge

$$Sp(2, \mathbb{R}) := \left\{ B \in SL(2, \mathbb{R}) \mid B^{tr} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine echte Teilmenge von $SL(2, \mathbb{R})$ oder gleich $SL(2, \mathbb{R})$?

Hinweise: Bei (a) kann man verschieden geschickt rechnen. Wie lautet die Formel für die inverse Matrix einer 2×2 -Matrix? Wenn man (a) verstanden hat, ist (b) einfach.