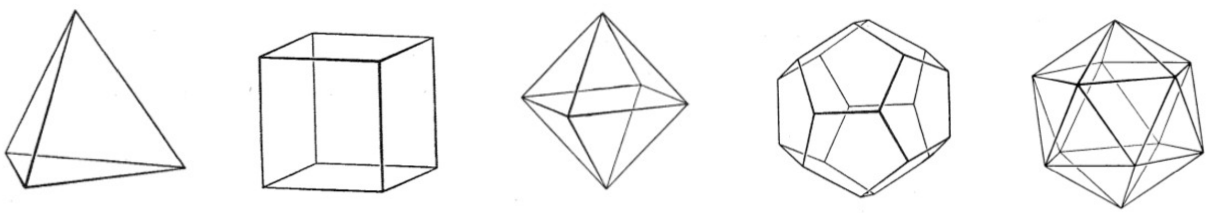
Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb

In den Aufgaben 1 bis 4 sollen Sie sich quantitativ den Platonischen Körpern nähern. Die fünf Platonischen Körper sind seit der Antike bekannt. Sie lassen sich als Schnitte von endlich vielen Halbräumen auffassen, so dass bei jedem von ihnen alle Seiten gleich große reguläre n-Ecke für ein $n \in \{3,4,5\}$ sind. Hier sind ihre Namen und Bilder von ihnen.



Man hat eine Dualität: Die Flächenmittelpunkte eines Platonischen Körpers sind die Ecken eines anderen Platonischen Körpers. Das gibt eine Dualität zwischen Würfel und Oktaeder und eine Dualität zwischen Dodekaeder und Ikosaeder. Das Tetraeder ist selbstdual.
Wenn man die Größen der Platonischen Körper so normiert, dass alle Kantenlängen gleich 1 sind, liegen die Ecken auf einer Sphäre mit einem bestimmten Radius

$$R_{\text{Tetraeder}}, R_{\text{Würfel}}, R_{\text{Oktaeder}}, R_{\text{Dodekaeder}}, R_{\text{Ikosaeder}} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

In den Aufgaben 1 bis 4 sollen Sie unter anderem diese Radien bestimmen.
Im Zuge der Überlegungen werden Sie auch verstehen, dass Ikosaeder und Dodekaeder wirklich existieren. Bei Tetraeder, Würfel und Oktaeder ist das klar.
Erschrecken Sie nicht über die Seitenzahl dieses Aufgabenblatts. Es sind viel Text und viele Bilder. Aber die Techniken sind überwiegend Schulmathematik: der Satz von Pythagoras, ähnliche Dreiecke und komplexe Zahlen.

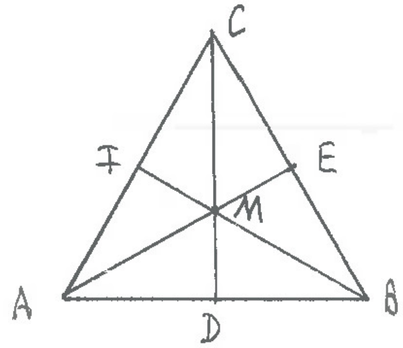
1. *(5=1+1+1+2 Punkte)*

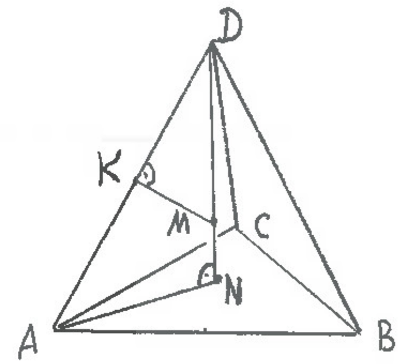
   (a) Schreiben Sie Realteil und Imaginärteil der dritten Einheitswurzeln $\xi := e^{2\pi i/3}$ und $\xi^2 = e^{2\pi i 2/3}$ hin und berechnen Sie $|1-\xi|$.

   (b) Gegeben sei ein reguläres Dreieck mit Kantenlängen gleich 1, Ecken A, B, C, Kantenmittelpunkten D, E, F mit $D \in \overline{AB}, E \in \overline{BC}, F \in \overline{CA}$ und Mittelpunkt M. Schließen Sie aus (a) auf die drei Abstände

$$\begin{aligned} d(A,E) &= d(B,F) = d(C,D), \\ d(M,A) &= d(M,B) = d(M,C), \\ d(M,D) &= d(M,E) = d(M,F), \end{aligned}$$

und bestimmen Sie das Verhältnis $d(M, A)/d(M, E)$.





(c) In der Situation von (b) sind die Dreiecke $\Delta(A, B, E)$ und $\Delta(A, M, D)$ *ähnlich*, d.h. sie haben die gleichen Winkel. Bestimmen Sie den Streckungsfaktor, mit dem man die Kanten des Dreiecks $\Delta(A, M, D)$ strecken muß, um ein zum Dreieck $\Delta(A, B, E)$ kongruentes Dreieck zu erhalten. Benutzen Sie dafür die Längen $d(A, D)$ und $d(A, E)$ ($d(A, E)$ berechnet man leicht mit Pythagoras). Schließen Sie daraus erneut (d.h. ohne (b)) auf die Abstände $d(M, A)$ und $d(M, E)$.

(d) Gegeben ist ein Tetraeder mit Kantenlängen gleich 1 und Ecken A, B, C, D und Mittelpunkt M und Mittelpunkt N der Seite $\Delta(A, B, C)$. Bestimmen Sie $d(D, N), d(D, M), d(M, N)$ und das Verhältnis $d(D, M)/d(M, N)$. Es ist $R_{\text{Tetraeder}} = d(D, M)$.

Hinweis: Am besten berechnet man zuerst $d(D, N)$ (dafür braucht man (b) und einmal Pythagoras) und geht danach ähnlich wie in (c) vor. K sei der Mittelpunkt der Kante $\overline{AD}$. Die Dreiecke $\Delta(D, K, M)$ und $\Delta(D, N, A)$ sind ähnlich. Den Streckungsfaktor, der sie verbindet, kann man mit Hilfe der Längen $d(D, N)$ und $d(D, K) = \frac{1}{2}$ bestimmen. Daraus kann man die anderen Längen ableiten.

2. *(2=1+1 Punkte)*

(a) Geben Sie (ohne Begründung) die Koordinaten der 8 Ecken eines Würfels im $\mathbb{R}^3$ an, dessen Kantenlängen gleich 1 sind, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist, und dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind. Geben Sie auch $R_{\text{Würfel}}$ an.

(b) Geben Sie (ohne Begründung) die Koordinaten der 6 Ecken eines Oktaeders im $\mathbb{R}^3$ an, dessen Kantenlängen gleich 1 sind, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist, und dessen Ecken auf den Koordinatenachsen liegen. Geben Sie auch R_{Oktaeder} an.

3. *(5=1+1+1+2 Punkte)*

(a) Die fünften Einheitswurzeln sind $\zeta := e^{2\pi i/5}$ und $\zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$. Zusammen mit 1 sind sie die Ecken eines regulären Fünfecks. In Aufgabe 1 von Blatt 5 im HWS 2014 hatten Sie $\cos \frac{2\pi}{10}$ bestimmt. Ganz ähnlich bestimmt man $cos \frac{2\pi}{5}$

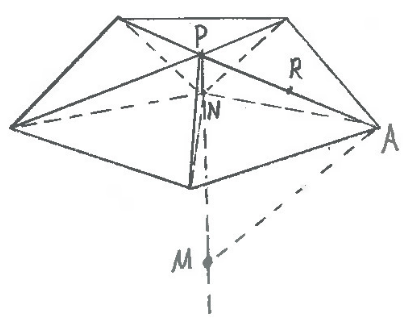
und $cos\frac{4\pi}{5}$:

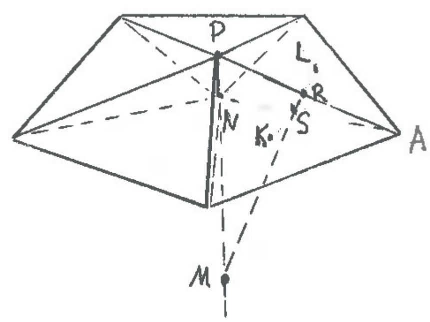
$$\begin{aligned}
0 &= \zeta^5 - 1 = (\zeta - 1)(\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1), \\
\text{also} \quad 0 &= \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1, \\
\text{also} \quad 0 &= \zeta^2 + \zeta + 1 + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} \\
&= (\zeta + \zeta^{-1})^2 + (\zeta + \zeta^{-1}) - 1, \\
&= (\zeta^2 + \zeta^{-2})^2 + (\zeta^2 + \zeta^{-2}) - 1, \\
\text{also} \quad 2\cos\frac{2\pi}{5} &= \zeta + \zeta^{-1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \\
\text{und} \quad 2\cos\frac{4\pi}{5} &= \zeta^2 + \zeta^{-2} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}.
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie $\sin\frac{2\pi}{5}$ und $\sin\frac{4\pi}{5}$ und berechnen Sie $|1 - \zeta|$.

(b) Schließen Sie aus (a) auf den Abstand zwischen Mittelpunkt und einer Ecke in einem regulären Fünfeck mit Kantenlängen gleich 1.

(c) Das folgende linke Bild (das rechte Bild betrifft Aufgabe 4) soll eine Pyramide zeigen, die fünf Seiten hat, die alle reguläre Dreiecke mit Kantenlängen gleich 1 sind. Also ist ihre Grundfläche ein reguläres Fünfeck. Sei P die Spitze der Pyramide und N der Mittelpunkt der Grundfläche. Bestimmen Sie die Höhe $d(N, P)$ der Pyramide. (Hinweis: (b) und einmal Pythagoras.)





(d) Sei M der eindeutige Punkt genau unterhalb der Spitze P der Pyramide in (c), dessen Abstand zu ihrer Spitze P und zu jeder der Ecken der Grundfläche gleich ist. Bestimmen Sie den Abstand $d(M, P)$.

Hinweis: Am besten benutzt man wieder Ähnlichkeit von Dreiecken. Sei R der Mittelpunkt der Kante $\overline{PA}$. Die Dreiecke $\Delta(A, N, P)$ und $\Delta(M, R, P)$ sind ähnlich. Es ist $d(M, P) = d(A, P) \cdot d(R, P)/d(N, P) = 1 \cdot \frac{1}{2}/d(N, P)$.

Bemerkungen: Es ist nun auch ziemlich klar, dass sich Kopien dieser Pyramide, die man aneinanderklebt, zu einem Ikosaeder zusammenfügen, dessen Ecken auf einer Sphäre mit Radius $d(M, P)$ liegen. Also gibt es das Ikosaeder. Insbesondere ist $d(M, P) = R_{\text{Ikosaeder}}$.

4. *(2 Punkte)* Bei der Pyramide in Aufgabe 3 seien K und L die Mittelpunkte benachbarter dreieckiger Seiten der Pyramide. Bestimmen Sie das Verhältnis $d(M, K)/d(K, L)$.

Hinweis: Wieder arbeitet man am besten mit zwei ähnlichen Dreiecken. Sei S der Mittelpunkt der Strecke $\overline{KL}$. Dann ist S auch derjenige Punkt auf der Strecke

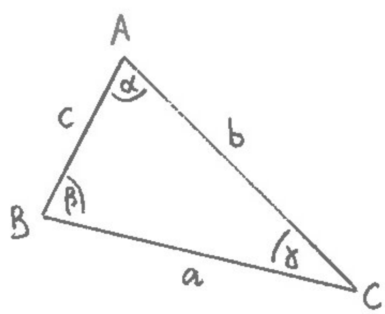
$\overline{RM}$, so dass das Dreieck $\Delta(K, S, M)$ einen rechten Winkel bei S hat. Dann ist es ähnlich zum Dreieck $\Delta(R, K, M)$ mit Streckungsfaktor $d(M, K)/d(M, R)$. Die Länge $d(K, L)$ ist gleich $2 \cdot d(K, S)$. Die Länge $d(M, K)$ läßt sich mit Pythagoras aus den Längen $d(M, P)$ und $d(P, K)$ berechnen. Die Längen $d(P, K)$ und $d(K, R)$ sind aus Aufgabe 1 bekannt.

Bemerkung: Das Verhältnis $d(M, K)/d(K, L)$ ist der Radius $R_{\text{Dodekaeder}}$.

5. *(2 Punkte)* Beweisen Sie die erste der 3 Formeln des **Kosinussatzes:**

   Bei einem Dreieck mit Ecken A, B, C und Winkeln α, β, γ und Seitenlängen a, b, c wie in der Skizze gilt

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$



Hinweis: $bc \cdot \cos\alpha = \phi(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Hier ist ϕ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

Abgabe bis Montag, den 20. April 2015, um 11:50 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5