

Lineare Algebra IIb

Frühjahrssemester 2015

Mannheim

Claus Hertling

26.05.2015

Inhaltsverzeichnis

14 Nullpunkt-erhaltende Symmetrien von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$	156
14.1 Definition von orthogonalen und unitären Automorphismen	156
14.2 Nullpunkt-erhaltende Symmetrien der Ebene	159
14.3 Orthogonale und unitäre Automorphismen	164
14.4 Nullpunkt-erhaltende Symmetrien des Raumes	169
14.5 Die Platonischen Körper	172
14.6 Zwei Experimente zu $SU(2)$ und $SO(3, \mathbb{R})$	179
15 Symmetrien der Ebene und des Raumes	183
15.1 Isometrien	183
15.2 Symmetrien der Ebene und des Raumes	187
15.3 Friesgruppen	194
15.4 Ornamentgruppen	198
15.5 Penrose-Pflasterungen	204

Die Vorlesung ist eine Fortsetzung der Vorlesungen Lineare Algebra I im HWS 2015 und Lineare Algebra IIa im FSS 2015. Daher fängt sie mit Kapitel 14 und auf Seite 156 an. Das Vorlesungsmanuskript ist nun vollständig.

hertling@math.uni-mannheim.de

14 Nullpunkt-erhaltende Symmetrien der Ebene und des Raumes

In diesem Kapitel ist $n \in \mathbb{N}$.

14.1 Definition von orthogonalen und unitären Automorphismen

Definition 14.1 (a) Sei V ein n -dimensionaler unitärer bzw. Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ . Ein Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ heißt *unitär* bzw. *orthogonal*, falls

$$\phi(f(v), f(w)) = \phi(v, w) \quad \text{für alle } v, w \in V$$

ist. Dann ist f injektiv, also ein Automorphismus von V .

(b) In der Situation von (a) ist die Menge aller unitären bzw. orthogonalen Automorphismen von V offenbar eine Gruppe. Sie wird $U(V, \phi)$ bzw. $O(V, \phi)$ genannt.

(c) Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ heißt *unitär*, falls A invertierbar ist und

$$\overline{A}^{tr} = A^{-1}$$

gilt. Hier ist $\overline{A} := (\overline{a_{ij}})$ bei $A = (a_{ij})$.

(d) Eine reelle Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ heißt *orthogonal*, falls A invertierbar ist und

$$A^{tr} = A^{-1}$$

gilt. Also ist eine reelle Matrix genau dann orthogonal, wenn sie (aufgefaßt als komplexe Matrix) unitär ist.

Beispiele 14.2 Satz 14.3 (a) sagt, dass eine Matrix genau dann unitär bzw. orthogonal ist, wenn ihre Spalten eine ON-Basis von $M(n \times 1, \mathbb{C})$ bzw. $M(n \times 1, \mathbb{R})$ bilden. Hier sind Beispiele orthogonaler 3×3 -Matrizen.

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Satz 14.3 (a) Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ mit $K = \mathbb{C}$ bzw. $K = \mathbb{R}$ ist genau dann unitär bzw. orthogonal, wenn die Spalten eine ON-Basis von $M(n \times 1, K)$ bezüglich des Standardskalarproduktes auf $M(n \times 1, K)$ bilden.

(b) Sei V ein n -dimensionaler unitärer bzw. Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ , und sei $f : V \rightarrow V$ unitär bzw. orthogonal. Dann erhält f das Skalarprodukt,

die Norm und die Metrik auf V , also auch die Längen von Vektoren. Im reellen Fall erhält f auch die Winkel zwischen Vektoren.

(c) Sei V ein n -dimensionaler unitärer bzw. Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ , und sei $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(α) f ist unitär bzw. orthogonal.

(β) Ist $\mathcal{B}$ eine ON-Basis, so ist die Matrix $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$ unitär bzw. orthogonal.

(d) Im Fall $V = M(n \times 1, K)$ mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und $A \in M(n \times n, K)$ gilt:

A ist unitär bzw. orthogonal $\iff l_A : V \rightarrow V$ ist unitär bzw. orthogonal.

Beweis: (a) $\overline{A}^{tr} = A^{-1}$ ist zu

$$A^{tr} \cdot \overline{A} = E_n$$

äquivalent. Und das ist dazu äquivalent, daß die Spalten von A eine ON-Basis von $M(n \times 1, K)$ für $K = \mathbb{C}$ bzw. $K = \mathbb{R}$ bezüglich des Standardskalarproduktes bilden.

(b) Nach Definition erhält f das Skalarprodukt ϕ . Es erhält die Norm wegen $\|x\| = \sqrt{\phi(x, x)}$ und die Metrik wegen $d(x, y) = \|x - y\|$. Im reellen Fall ist der Winkel $\gamma \in [0, \pi]$ zwischen zwei Vektoren $x, y \in V - \{0\}$ durch $\phi(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \gamma$ bestimmt. Daher erhält f dann auch die Winkel.

(c) Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine ON-Basis von V .

Behauptung: f ist unitär bzw. orthogonal
 $\iff$ es bildet $\mathcal{B}$ wieder auf eine ON-Basis ab.

Beweis der Behauptung: $\implies$ folgt aus (b).

$\impliedby$: Daß f $\mathcal{B}$ wieder auf eine ON-Basis $f(\mathcal{B})$ abbildet, bedeutet gerade

$$\phi(f(\mathcal{B})^{tr}, f(\mathcal{B})) = E_n \quad (= \phi(\mathcal{B}^{tr}, \mathcal{B})).$$

Seien $\mathcal{B} \cdot x$ und $\mathcal{B} \cdot y$ mit $x, y \in M(n \times 1, K)$ beliebige Vektoren in V . Dann ist (im Fall $K = \mathbb{C}$ hat Lemma 13.5 (a) eine komplexe Version)

$$\begin{aligned} \phi(f(\mathcal{B} \cdot x), f(\mathcal{B} \cdot y)) &= \phi((f(\mathcal{B} \cdot x))^{tr}, f(\mathcal{B} \cdot y)) = \phi(x^{tr} \cdot f(\mathcal{B})^{tr}, f(\mathcal{B}) \cdot y) \\ &\stackrel{13.5 (a)}{=} x^{tr} \cdot \phi(f(\mathcal{B})^{tr}, f(\mathcal{B})) \cdot \bar{y} = x^{tr} \cdot E_n \cdot \bar{y} = x^{tr} \cdot \bar{y} \\ &= \phi(\mathcal{B} \cdot x, \mathcal{B} \cdot y). \end{aligned}$$

Also erhält f das Skalarprodukt, also ist f unitär bzw. orthogonal. Diese Rechnung drückt bloß aus, daß sich die Eigenschaft von f , das Skalarprodukt zu erhalten, aufgrund der Linearität von f von einer ON-Basis auf alle Vektoren erweitert. ($\square$)

Es ist $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B} \cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$, also

$$\begin{aligned}\phi(f(\mathcal{B})^{tr}, f(\mathcal{B})) &= \phi((\mathcal{B} \cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}))^{tr}, \mathcal{B} \cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})) \\ &= M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})^{tr} \cdot \phi(\mathcal{B}^{tr}, \mathcal{B}) \cdot \overline{M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})} \\ &= M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})^{tr} \cdot \overline{M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})}.\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist genau dann gleich E_n , wenn die Matrix $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$ unitär bzw. orthogonal ist. Mit der Behauptung folgt $(\alpha) \iff (\beta)$.

(d) Das folgt aus (c) mit $\mathcal{B}$ =Standardbasis und $M(\mathcal{B}, l_A, \mathcal{B}) = A$. $\square$.

Die abstrakte Gruppe $U(V, \phi)$ bzw. $O(V, \phi)$ ist zur Matrizen­gruppe $U(n)$ bzw. $O(n, \mathbb{R})$ isomorph, die im folgenden Punkt 14.4 definiert wird.

Definition/Lemma 14.4 (a) (Definition)

$$\begin{aligned}U(n) &:= \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär}\} \\ &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \overline{A}^{tr} = A^{-1}\}, \\ SU(n) &:= \{A \in U(n) \mid \det A = 1\} &= U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}), \\ O(n, \mathbb{R}) &:= \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal}\} \\ &= \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^{tr} = A^{-1}\} &= U(n) \cap GL(n, \mathbb{R}), \\ SO(n, \mathbb{R}) &:= \{A \in O(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\} &= O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R}) \\ & &= U(n) \cap SL(n, \mathbb{R}).\end{aligned}$$

(b) (Lemma) Die vier Mengen in (a) sind mit der Matrizenmultiplikation Gruppen. Man hat die Untergruppenbeziehungen

$$\begin{array}{ccccc}SO(n, \mathbb{R}) & \subset & O(n, \mathbb{R}) & \subset & GL(n, \mathbb{R}) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ SU(n) & \subset & U(n) & \subset & GL(n, \mathbb{C}).\end{array}$$

(c) (Definition) $O(n, \mathbb{R})$ ist die orthogonale Gruppe, $SO(n, \mathbb{R})$ ist die spezielle orthogonale Gruppe, $U(n)$ ist die unitäre Gruppe und $SU(n)$ ist die spezielle unitäre Gruppe.

(d) (Lemma) Sei V ein unitärer bzw. Euklidischer n -dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ . Sei $\mathcal{B}$ eine ON-Basis von V . Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}U(V, \phi) &\rightarrow U(n), & f &\mapsto M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}), \\ \text{bzw. } O(V, \phi) &\rightarrow O(n, \mathbb{R}), & f &\mapsto M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}),\end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis: (a) und (c) Definitionen.

(b) Im Fall von $U(n)$ muß man nachrechnen, daß mit A und B in $U(n)$ auch $A \cdot B$ und A^{-1} in $U(n)$ sind:

$$\begin{aligned}A, B \in U(n) &\Rightarrow \overline{AB}^{tr} = \overline{B}^{tr} \overline{A}^{tr} = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1} \\ \text{und } \overline{A^{-1}}^{tr} &= \overline{\overline{A}^{tr}}^{tr} = A = (A^{-1})^{-1} \Rightarrow AB, A^{-1} \in U(n).\end{aligned}$$

$SU(n)$, $O(n, \mathbb{R})$ und $SO(n, \mathbb{R})$ sind Gruppen, weil $U(n)$, $SL(n, \mathbb{C})$, $GL(n, \mathbb{R})$ und $SL(n, \mathbb{R})$ Untergruppen von $GL(n, \mathbb{C})$ sind und weil der Schnitt zweier Untergruppen wieder eine Untergruppe ist.

Im Fall von $U(n)$ und $O(n, \mathbb{R})$ kann man alternativ auch (d) benutzen, um zu schließen, dass $U(n)$ und $O(n, \mathbb{R})$ Gruppen sind.

(d) Die linken Seiten sind Gruppen. Wegen Satz 14.3 (c) sind die Abbildungen wohldefiniert und bijektiv. Wegen der Regeln aus Kapitel 5 zum Übergang zwischen Endomorphismen und Matrizen,

$$M(\mathcal{A}, f \circ g, \mathcal{C}) = M(\mathcal{A}, f, \mathcal{B}) \cdot M(\mathcal{B}, g, \mathcal{C}) \quad \text{und} \quad M(\mathcal{B}, f^{-1}, \mathcal{A}) = M(\mathcal{A}, f, \mathcal{B})^{-1},$$

geht die Komposition auf der linken Seite in die Matrizenmultiplikation auf der rechten Seite über, und das Invertieren ist links und rechts auch verträglich. Daher sind die rechten Seiten auch Gruppen, und die Abbildungen sind Gruppenisomorphismen. $\square$

Beispiele 14.5 (i) Eine unitäre Matrix A erfüllt $|\det A| = 1$, eine orthogonale Matrix A erfüllt $\det A = \pm 1$. Beides gilt wegen

$$A^{tr} \cdot \bar{A} = E_n, \quad \text{also} \quad 1 = \det E_n = \det A^{tr} \cdot \det \bar{A} = \det A \cdot \overline{\det A} = |\det A|^2.$$

Ein orthogonaler Automorphismus $f \in O(V, \phi)$ eines n -dimensionalen Euklidischen Vektorraums V ist *orientierungserhaltend*, falls $\det f = 1$ ist, und *orientierungsumkehrend*, falls $\det f = -1$ ist, vgl. das Ende von Kapitel 7.

(ii) $n = 1$, $K = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} SO(1) &= \{E_1\} = \{(1)\} \cong \{\text{id}\} \subset O(\mathbb{R}, \phi_{st}), \\ O(1) &= \{(1), (-1)\} \\ &\cong O(\mathbb{R}, \phi_{st}) = \{\text{id}, \text{Spiegelung an } 0\}. \end{aligned}$$

(iii) $n = 1$, $K = \mathbb{C}$: $SU(1) = \{E_1\} = \{(1)\}$,
 $U(1) = \{(z) \mid z \in S^1\} \cong (\text{als Gruppe}) S^1$.

(iv) $n = 2$, $K = \mathbb{R}$: Siehe Unterkapitel 14.2.

(v) $n = 3$, $K = \mathbb{R}$: Siehe Unterkapitel 14.4.

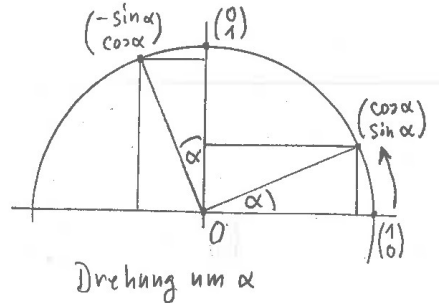
(vi) $n = 2$, $K = \mathbb{C}$: Siehe Unterkapitel 14.6.

14.2 Nullpunkt-erhaltende Symmetrien der Ebene

Satz 14.6 (a) Die Gruppe $SO(2, \mathbb{R})$ der orthogonalen 2×2 Matrizen mit Determinante 1 ist

$$\begin{aligned} SO(2, \mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\} \\ &\cong (\text{als Gruppe}) \{e^{i\alpha} \mid \alpha \in [0, 2\pi)\} = S^1. \end{aligned}$$

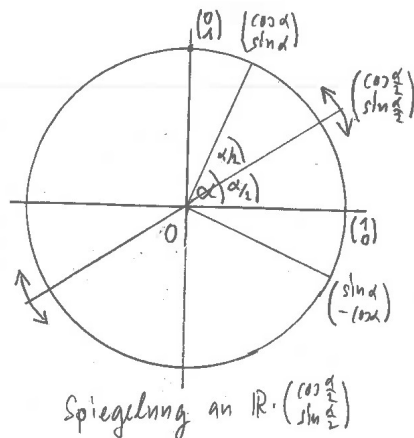
Die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ ist eine Drehmatrix. Die Abbildung $l_A : M(2 \times 1, \mathbb{R}) \rightarrow M(2 \times 1, \mathbb{R})$ ist eine Drehung um den Winkel α mit 0 als Fixpunkt.



(b) Die Gruppe $O(2, \mathbb{R})$ enthält neben den Drehungen die 1-Parameter-Familie aller Spiegelungen an Achsen durch den Nullpunkt:

$$\begin{aligned} O(2, \mathbb{R}) &= SO(2, \mathbb{R}) \cup SO(2, \mathbb{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= SO(2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\} \\ &\approx (\text{als Menge}) S^1 \cup S^1. \end{aligned}$$

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$ ist eine Spiegelungsmatrix. Sie hat die Eigenwerte 1 und -1 , und Eigenvektoren dazu sind die (zueinander orthogonalen) Vektoren $\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$. Sie ist daher eine Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$. Sie ist orientierungsumkehrend (das paßt zu $\det A = -1$).



Bei $O(2, \mathbb{R})$ parametrisiert die eine S^1 die Drehungswinkel der Drehungen; die andere S^1 parametrisiert die Spiegelungsachsen der Spiegelungen.

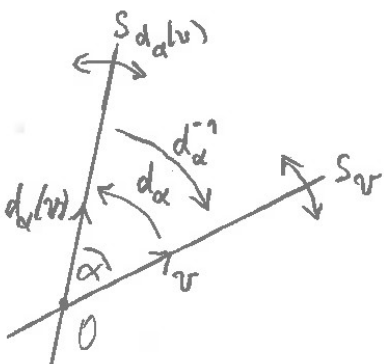
(c) Als Gruppe ist $O(2, \mathbb{R})$ nicht isomorph zu $S^1 \times \{\pm 1\}$; vielmehr ist sie ein **semidirektes Produkt** (Definition nicht hier) der Gruppen S^1 und $\{\pm 1\}$. Denn Drehungen und Spiegelungen kommutieren nicht (vgl. (d)).

(d) Sei V ein 2-dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ . Wegen $O(V, \phi) \cong O(2, \mathbb{R})$ kann man auch die orthogonalen Automorphismen von V als Drehungen und Spiegelungen deuten.

$$\begin{aligned} d_\alpha &:= \text{Drehung um den Winkel } \alpha \text{ und mit Fixpunkt } 0, \\ s_v &:= \text{Spiegelung an der Geraden durch } v \in V - \{0\} \end{aligned}$$

Die Drehungen und Spiegelungen kommutieren nicht. Es gilt

$$d_\alpha \circ s_v \circ d_\alpha^{-1} = s_{d_\alpha(v)}.$$



Beweis: (a) Eine reelle 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spalten $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ eine ON-Basis des $M(2 \times 1, \mathbb{R})$ bilden. Es gibt ein eindeutiges $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$. Dann ist $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, also

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \pm(-\sin \alpha) \\ \sin \alpha & \pm \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Im Fall “+” ist das eine Drehmatrix, im Fall “-” ist es eine Spiegelungsmatrix, siehe (b).

(b) Sei $A := \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$. Offenbar ist das charakteristische Polynom

$$P_A(t) = (t - \cos \alpha)(t + \cos \alpha) - \sin^2 \alpha = t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1).$$

Also sind die Eigenwerte ± 1 . Daß die Eigenvektoren so sind wie angegeben, kann man auf zwei Weisen einsehen.

1. **Weise**, Nachrechnen:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

(Additionstheorem von $e^{i\alpha} \cdot e^{-i\frac{\alpha}{2}} = e^{i\frac{\alpha}{2}}$),

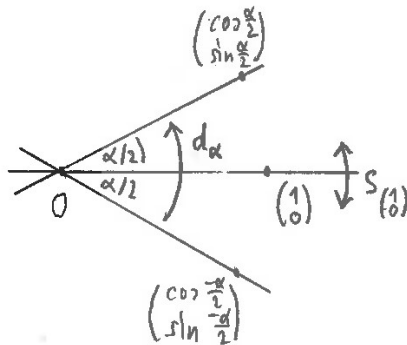
$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \\ -\sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

2. **Weise**, mit geometrischen Argumenten und der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Interpretation dieser Gleichung: Man führt zuerst eine Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aus, danach eine Drehung um den Winkel α . Die Komposition ist eine Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$.

Begründung: Die Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bildet den Vektor $\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ auf den Vektor $\begin{pmatrix} \cos \frac{-\alpha}{2} \\ \sin \frac{-\alpha}{2} \end{pmatrix}$ ab, die Drehung bildet diesen Vektor wieder auf den Vektor $\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ ab. Also ist $\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.



Weil l_A Winkel erhält, muß der orthogonale Vektor $\begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ wieder auf einen orthogonalen Vektor abgebildet werden, also notwendigerweise auf ± 1 mal sich selber. Wegen $\det A = -1$ ist der zweite Eigenwert -1 , also wird der Vektor $\begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ auf -1 mal sich selber abgebildet

(c) Siehe (d).

(d) $d_\alpha \circ s_v \circ d_{-\alpha}$ ist wegen $\det(d_\alpha \circ s_v \circ d_{-\alpha}) = 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1$ eine Spiegelung. Man muß bloß die Spiegelungsachse bestimmen, also einen Eigenvektor zum Eigenwert 1. Die folgende Rechnung paßt zur Skizze im Lemma und gibt den Eigenvektor $d_\alpha(v)$:

$$(d_\alpha \circ s_v \circ d_{-\alpha})(d_\alpha(v)) = (d_\alpha \circ s_v)(v) = d_\alpha(v).$$

□

Definition 14.7 (a) Ein *reguläres* n -Eck A in einem 2-dimensionalen Euklidischen Vektorraum V ist ein n -Eck mit lauter gleichen Winkeln und gleichen Kantenlängen. A ist die konvexe Hülle seiner Ecken $E_1, \dots, E_n$:

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i \mid \lambda_j \in [0, 1], \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\} \subset V.$$

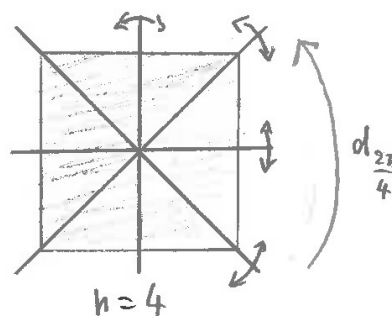
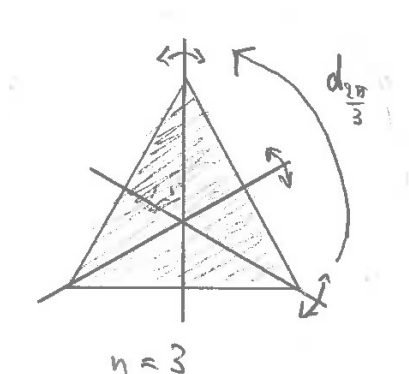
(b) Bemerkung: Die n -ten Einheitswurzeln $e^{2\pi i k/n} \in S^1 \subset \mathbb{C}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, sind die Ecken eines regulären n -Ecks. Hier sind die Kantenlängen alle gleich zu $|1 - e^{2\pi i/n}|$.

(c) Sei A ein reguläres n -Eck in $M(2 \times 1, \mathbb{R})$ mit Nullpunkt als Mittelpunkt. Die Gruppe aller Symmetrien von A ist

$$\text{Sym}(A) := \{f \in O(2, \mathbb{R}) \mid f(A) = A\}.$$

Die Gruppe aller orientierungserhaltenden Symmetrien von A ist

$$\text{Sym}_{or}(A) := \{f \in SO(2, \mathbb{R}) \mid f(A) = A\}.$$



Satz 14.8 (a) In $SO(2, \mathbb{R})$ gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ nur eine endliche Untergruppe. Es ist die Gruppe der Drehungen um die Winkel $\frac{2\pi k}{n}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Sie ist eine zyklische Gruppe der Ordnung n . Sie ist für jedes reguläre n -Eck A in $M(2 \times 1, \mathbb{R})$ mit Mittelpunkt = 0 die Gruppe $\text{Sym}_{or}(A)$. Sie wird auch $C_n^{(2)}$ genannt (der obere Index soll andeuten, dass hier Untergruppen der $O(2, \mathbb{R})$ betrachtet werden).

(b) Die endlichen Untergruppen von $O(2, \mathbb{R})$, die nicht in $SO(2, \mathbb{R})$ liegen, sind genau die Gruppen $\text{Sym}(A)$ für die regulären n -Ecke A in $M(2 \times 1, \mathbb{R})$ mit Mittelpunkt $= 0$. Die Gruppen für ein festes n sind alle konjugiert und bilden eine 1-Parameter-Familie von Gruppen. Sie haben alle $2n$ Elemente und enthalten die Untergruppe $C_n^{(2)}$ aller Drehungen um Winkel $\frac{2\pi k}{n}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Diese Untergruppe ist ein Normalteiler in $\text{Sym}(A)$. Die weiteren Elemente sind Spiegelungen an den Geraden durch 0 und durch Kantenmittelpunkte oder Ecken. Alle diese Gruppen heißen Diedergruppen, Notation: Sie sind Gruppen vom Typ $D_{2n}^{(2)}$.

Beweis: (a) Weil $SO(2, \mathbb{R}) \cong S^1$ ist, bleibt nur einzusehen, dass die endlichen Untergruppen der S^1 alle zyklisch sind und aus Einheitswurzeln bestehen. Das wird klar, wenn man in jeder endlichen Untergruppe der S^1 das Element $e^{2\pi i \alpha}$ mit minimalem $\alpha > 0$ betrachtet. Es muß ein zyklisches Erzeugendes der Gruppe sein.

(b) Sei $U \subset O(2, \mathbb{R})$ eine endliche Untergruppe mit $U \not\subset SO(2, \mathbb{R})$. Dann ist die Einschränkung des Gruppenhomomorphismus $\det : O(2, \mathbb{R}) \rightarrow \{\pm 1\}$ auf $\det : U \rightarrow \{\pm 1\}$ surjektiv. Der Kern $U \cap SO(2, \mathbb{R})$ ist wegen (a) eine Gruppe $C_n^{(2)}$. Er ist ein Normalteiler und hat neben sich selber nur die Nebenklasse $U \cap (O(2, \mathbb{R}) - SO(2, \mathbb{R}))$. Dann ist auch $|U \cap (O(2, \mathbb{R}) - SO(2, \mathbb{R}))| = n$, und es ist $|U| = 2n$. Die Elemente von $U \cap (O(2, \mathbb{R}) - SO(2, \mathbb{R}))$ sind lauter Spiegelungen. Sei s_v eine von ihnen. Wegen

$$d_{1/n} \circ s_v = s_{d_{1/2n}(v)}$$

besteht $U \cap (O(2, \mathbb{R}) - SO(2, \mathbb{R}))$ genau aus den Spiegelungen an den Geraden $\mathbb{R} \cdot d_{k/2n}(v)$ für $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Es gibt bis auf Streckung ein (im Fall n ungerade) oder zwei (im Fall n gerade) reguläre n -Ecke A mit Mittelpunkt 0, so dass diese Geraden durch die Ecken oder Kantenmittelpunkte von A laufen. Es ist $U = \text{Sym}(A)$. $\square$

14.3 Orthogonale und unitäre Automorphismen

Bemerkungen 14.9 Das Ziel dieses Unterkapitels ist Satz 14.11, der die Struktur von orthogonalen Automorphismen und orthogonalen Matrizen für beliebiges n beschreibt.

Aber es ist einfacher (und eleganter), zuerst in Satz 14.10 die Struktur von unitären Automorphismen und Matrizen zu klären.

Die Sätze 14.10 und 14.11 geben die zentralen Strukturaussagen für:

1. Unitäre Automorphismen (d.h. über $\mathbb{C}$, abstrakte Situation),
2. Unitäre Matrizen (über $\mathbb{C}$, Übergang zu Matrizen),
3. Orthogonale Matrizen (über $\mathbb{R}$, Spezialisierung auf reelle Matrizen),
4. Orthogonale Automorphismen (über $\mathbb{R}$, Übergang zur abstrakten Situation).

Die Resultate werden in dieser Reihenfolge entwickelt. Die Resultate über $\mathbb{C}$ sind wegen des Hauptsatzes der Algebra (Satz 2.19 bzw. 2.23 (a), *komplexe Polynome zerfallen in Linearfaktoren*) einfacher als die über $\mathbb{R}$. Ein Teil der Argumente ist sehr ähnlich zum Beweis des Spektralsatzes 13.1 für reelle symmetrische Matrizen.

Satz 14.10 (Spektralsatz für unitäre Automorphismen und Matrizen)

(a) (Abstrakte Version) Sei V ein n -dimensionaler unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ , und sei $f : V \rightarrow V$ ein unitärer Automorphismus, d.h. $f \in U(V, \phi)$. Dann gilt:

- (i) Alle Eigenwerte λ von f erfüllen $|\lambda| = 1$.
- (ii) Es gibt keine Jordanblöcke außer denen der Größe 1×1 , d.h. f ist diagonalisierbar, d.h. $\text{Hau}(f, \lambda) = \text{Eig}(f, \lambda)$ für alle Eigenwerte λ .
- (iii) Verschiedene Eigenräume sind orthogonal, d.h.

$$\text{Eig}(f, \lambda_1) \perp \text{Eig}(f, \lambda_2) \quad \text{für alle } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Wegen (ii) und (iii) gibt es eine ON-Basis von V aus Eigenvektoren von f .

(b) (Matrix-Version) Sei $A \in U(n)$ eine unitäre Matrix. Dann gelten die Aussagen (i), (ii) und (iii) von (a) genauso. Es gibt eine ON-Basis von $M(n \times 1, \mathbb{C})$ bezüglich des Standardskalarproduktes aus Eigenvektoren von A . Ist

$$T := M(\text{Standardbasis}, \text{ON-Basis aus Eigenvektoren})$$

die Basiswechselmatrix, so ist $T \in U(n)$ und

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Beweis: (a) (i) Sei $v \in V - \{0\}$ ein Eigenvektor von f mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$0 < \phi(v, v) = \phi(f(v), f(v)) = \phi(\lambda \cdot v, \lambda \cdot v) = \lambda \bar{\lambda} \cdot \phi(v, v) = |\lambda|^2 \cdot \phi(v, v).$$

(ii) Wegen Satz 12.15 (a) gibt es eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V , so dass die Matrix $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$ in Jordannormalform ist.

Nun Indirekter Beweis. **Annahme:** f ist nicht diagonalisierbar.

Dann gibt es wegen Bemerkung 12.14 (ii) einen Eigenwert λ , so dass die Matrix $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$ einen Jordanblock der Größe ≥ 2 zum Eigenwert λ hat. Also gibt es Vektoren b_j und b_{j+1} in der Basis oben mit

$$f(b_j) = \lambda \cdot b_j \quad \text{und} \quad f(b_{j+1}) = \lambda \cdot b_{j+1} + b_j.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \phi(b_{j+1}, b_j) &= \phi(f(b_{j+1}), f(b_j)) = \phi(\lambda \cdot b_{j+1} + b_j, \lambda \cdot b_j) \\ &= |\lambda|^2 \cdot \phi(b_{j+1}, b_j) + \bar{\lambda} \cdot \phi(b_j, b_j) = \phi(b_{j+1}, b_j) + \bar{\lambda} \cdot \phi(b_j, b_j), \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad \phi(b_j, b_j) = 0.$$

Aber das ist wegen $b_j \neq 0$ unmöglich. Also war die Annahme oben falsch.

(iii) Seien v_1 und v_2 zwei Eigenvektoren mit verschiedenen Eigenwerten λ_1 und λ_2 . Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(v_1, v_2) - \phi(f(v_1), f(v_2)) \\ &= \phi(v_1, v_2) - \phi(\lambda_1 \cdot v_1, \lambda_2 \cdot v_2) \\ &= \phi(v_1, v_2) \cdot (1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2}). \end{aligned}$$

Aus $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ folgt $1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2} \neq 0$. Daher ist $\phi(v_1, v_2) = 0$. ON -Basen der einzelnen Eigenräume $\text{Eig}(f, \lambda)$ geben zusammen eine ON -Basis von V aus Eigenvektoren von f .

(b) Man setzt $V := M(n \times 1, \mathbb{C})$ und $\phi :=$ Standardskalarprodukt. Der Automorphismus

$$l_A : M(n \times 1, \mathbb{C}) \rightarrow M(n \times 1, \mathbb{C}), \quad b \mapsto A \cdot b,$$

ist nach Satz 14.3 (d) unitär. Man wendet (a) mit $f = l_A$ an (und vergegenwärtigt sich die Definition von Eigenvektoren und Eigenwerten von Matrizen). $\square$

Satz 14.11 (Spektralsatz für orthogonale Matrizen und Automorphismen)

(a) (Matrix-Version) Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix, d.h. $A^{\text{tr}} = A^{-1}$. Dann gibt es eine orthogonale Matrix $T \in O(n, \mathbb{R})$, so daß $T^{-1} \cdot A \cdot T$ die Block-Gestalt hat (wo nichts steht, stehen Nullen):

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} E_k & & & & & \\ & -E_l & & & & \\ & & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & & \\ & & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \cos \alpha_m & -\sin \alpha_m \\ & & & & & \sin \alpha_m & \cos \alpha_m \end{pmatrix}.$$

Hier ist $k \geq 0$, $l \geq 0$, $m \geq 0$ und natürlich $k + l + 2m = n$. Die Winkel α_i sind in $[0, 2\pi) - \{0, \pi\}$.

(b) (Abstrakte Version) Sei V ein n -dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ , und sei $f : V \rightarrow V$ ein orthogonaler Automorphismus. Dann läßt sich V als direkte Summe

$$V = \text{Eig}(f, 1) \oplus \text{Eig}(f, -1) \oplus \bigoplus_{i=1}^m B_i$$

von Unterräumen mit den folgenden Eigenschaften schreiben:

(i) Die Unterräume sind orthogonal zueinander.

(ii) Die Unterräume sind f -invariant (das ist klar bei $\text{Eig}(f, 1)$ und $\text{Eig}(f, -1)$).

(iii) Die Unterräume B_i sind zweidimensional, und $f|_{B_i} : B_i \rightarrow B_i$ ist eine Drehung um einen Winkel $\alpha_i \in [0, 2\pi) - \{0, \pi\}$.

(Es kann $\text{Eig}(f, 1) = \{0\}$ oder $\text{Eig}(f, -1) = \{0\}$ oder $m = 0$ sein.)

Beweis: (a) Im folgenden muß sorgfältig zwischen Eigenvektoren von A in $M(n \times 1, \mathbb{C})$ und Eigenvektoren von A in $M(n \times 1, \mathbb{R})$ unterschieden werden. In zwei Schritten werden Spaltenvektoren $b_1, \dots, b_n \in M(n \times 1, \mathbb{R})$ gewählt, die zusammen eine ON-Basis bilden und eine Matrix T mit den gewünschten Eigenschaften geben.

Die orthogonale Matrix $A \in GL(n, \mathbb{R})$ ist, aufgefaßt als komplexe Matrix, unitär. Daher gilt Satz 14.10 (b) für sie. Daher ist

$$M(n \times 1, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\lambda \text{ Eigenwert von } A} \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \lambda),$$

und die Summanden sind bezüglich des Standardskalarproduktes in $M(n \times 1, \mathbb{C})$ orthogonal zueinander. Ist $v \in \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \lambda)$, also $A \cdot v = \lambda \cdot v$, so ist wegen $A = \bar{A}$ reell

$$A \cdot \bar{v} = \overline{A \cdot v} = \overline{\lambda \cdot v} = \bar{\lambda} \cdot \bar{v}.$$

Daher ist die komplexe Konjugation ein Isomorphismus

$$\bar{\cdot} : \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \lambda) \rightarrow \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \bar{\lambda}), \quad v \mapsto \bar{v}.$$

Die Eigenwerte 1 und -1 sind reell. Daher gilt

$$\begin{aligned} v \in \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \pm 1) &\iff \Re(v) \text{ und } \Im(v) \in \text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, \pm 1) \\ \text{und } \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \pm 1) &= \mathbb{C} \cdot \text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, \pm 1). \end{aligned}$$

1. Schritt: Es wird eine ON-Basis $b_1, \dots, b_k$ von $\text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, 1)$ gewählt, und ebenso eine ON-Basis $b_{k+1}, \dots, b_{k+l}$ von $\text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, -1)$ (evtl. ist $k = 0$ oder $l = 0$). Dann ist $b_1, \dots, b_{k+l}$ eine ON-Basis von $\text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, 1) \oplus \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, -1)$ als Euklidischer Vektorraum und von $\text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, 1) \oplus \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, -1)$ als unitärer Vektorraum (jeweils mit der Einschränkung des Standardskalarproduktes).

Falls $k + l = n$ ist, ist man schon fertig. Im anderen Fall werden die restlichen Spaltenvektoren $b_{k+l+1}, \dots, b_n$ im 2. Schritt konstruiert.

2. Schritt: Man wählt eine ON-Basis $v_1, \dots, v_m$ des unitären Vektorraums

$$\bigoplus_{\lambda: \Im(\lambda) > 0} \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \lambda),$$

und zwar so, dass jeder der Vektoren $v_1, \dots, v_m$ in einem der Eigenräume liegt. Das geht, weil die Eigenräume orthogonal zueinander sind. Der Eigenwert zu v_j sei λ_j (diese Eigenwerte müssen nicht alle verschieden sein).

Die Vektoren $\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_m$ sind dann automatisch eine ON-Basis von

$$\bigoplus_{\lambda: \Im(\lambda) > 0} \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \overline{\lambda}) = \bigoplus_{\lambda: \Im(\lambda) < 0} \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \lambda),$$

und es ist $\overline{v}_j \in \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \overline{\lambda}_j)$. Weil alle Eigenräume orthogonal zueinander sind, bilden die Vektoren $b_1, \dots, b_{k+l}, v_1, \dots, v_m, \overline{v}_1, \dots, \overline{v}_m$ eine ON-Basis von $M(n \times 1, \mathbb{C})$.

Man definiert für $j = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} b_{k+l+2j-1} &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(v_j + \overline{v}_j), \\ b_{k+l+2j} &:= \frac{i}{\sqrt{2}}(v_j - \overline{v}_j). \end{aligned}$$

Es muß $k+l+2m = n$ sein. Also hat man nun Vektoren $b_{k+l+1}, \dots, b_n$ gewählt. Dann ist auch $\mathcal{B} := (b_1, \dots, b_n)$ eine $\mathbb{C}$ -Vektorraumbasis von $M(n \times 1, \mathbb{C})$. Wegen

$$\begin{aligned} \overline{b_{k+l+2j-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{v}_j + v_j) = b_{k+l+2j-1}, \\ \overline{b_{k+l+2j}} &= \frac{-i}{\sqrt{2}}(\overline{v}_j - v_j) = b_{k+l+2j}, \end{aligned}$$

sind $b_{k+l+1}, \dots, b_n$ Spaltenvektoren mit reellen Einträgen, $b_{k+l+1}, \dots, b_n \in M(n \times 1, \mathbb{R})$. Also ist $\mathcal{B}$ auch eine $\mathbb{R}$ -Vektorraumbasis von $M(n \times 1, \mathbb{R})$.

Weil v_j und $\overline{v}_j$ eine ON-Basis des von ihnen erzeugten (komplexen) Vektorraums ist, ist

$$\overline{v}_j^{tr} \cdot v_j = v_j^{tr} \cdot \overline{v}_j = 1, \quad v_j^{tr} \cdot v_j = \overline{v}_j^{tr} \cdot \overline{v}_j = 0.$$

Damit rechnet man leicht aus

$$b_{k+l+r}^{tr} \cdot b_{k+l+s} = \delta_{rs} \quad \text{für } r, s \in \{2j-1, 2j\}.$$

Daher ist $\mathcal{B}$ eine ON-Basis von $M(n \times 1, \mathbb{R})$.

Es ist $\lambda_j = e^{i\alpha_j} = \cos \alpha_j + i \sin \alpha_j$ für ein $\alpha_j \in (0, \pi)$, denn $\Im(\lambda_j) > 0$. Man rechnet aus

$$\begin{aligned} (A \cdot b_{k+l+2j-1}, A \cdot b_{k+l+2j}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\lambda_j \cdot v_j + \overline{\lambda}_j \cdot \overline{v}_j, i\lambda_j \cdot v_j - i\overline{\lambda}_j \cdot \overline{v}_j) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\cos \alpha_j \cdot (v_j + \overline{v}_j) + \sin \alpha_j \cdot (iv_j - i\overline{v}_j), \\ &\quad \sin \alpha_j(-v_j - \overline{v}_j) + \cos \alpha_j(iv_j - i\overline{v}_j)) \\ &= (b_{k+l+2j-1}, b_{k+l+2j}) \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_j & -\sin \alpha_j \\ \sin \alpha_j & \cos \alpha_j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun sei T die Matrix mit den Spalten $b_1, \dots, b_n$, also ist T die Basiswechselmatrix $M(\text{Standardbasis}, \mathcal{B})$. Daher ist $M(\mathcal{B}, l_A, \mathcal{B}) = T^{-1}AT$ wie im Satz 14.11 (a) angegeben.

(b) Man wählt irgendeine ON -Basis $\mathcal{A}$ des Euklidischen Vektorraums V . Die Matrix $A := M(\mathcal{A}, f, \mathcal{A})$ ist orthogonal nach Satz 14.3 (c). Man wendet Teil (a) an und erhält eine orthogonale Matrix T mit $T^{-1} \cdot A \cdot T$ wie in (a). Weil T orthogonal ist, ist auch die Basis $(b_1, \dots, b_n) = \mathcal{B} := \mathcal{A} \cdot T$ eine ON -Basis; T ist die Basiswechsellmatrix $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Daher ist

$$M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, f, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

von der Gestalt wie in (a). Also ist

$$\begin{aligned} \text{Eig}(f, 1) &= \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{R} \cdot b_i, \\ \text{Eig}(f, -1) &= \bigoplus_{i=k+1}^{k+l} \mathbb{R} \cdot b_i, \end{aligned}$$

und f ist auf jedem der zweidimensionalen Räume $\mathbb{R} \cdot b_{k+l+1} \oplus \mathbb{R} \cdot b_{k+l+2}, \dots, \mathbb{R} \cdot b_{n-1} \oplus \mathbb{R} \cdot b_n$ eine Drehung. $\square$

Bemerkung 14.12 Im Fall $n = 2$ gibt Satz 14.11 (b) erneut die Aussage von Satz 14.6 (d), dass ein orthogonaler Automorphismus eines 2-dimensionalen Euklidischen Vektorraums eine Drehung oder eine Spiegelung ist. Aber in Satz 14.11 (a) sieht man zwar alle Drehungsmatrizen, aber nur die eine Spiegelungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, nicht die Spiegelungsmatrizen $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$ für $\alpha \in (0, 2\pi)$. Die erhält man aus der speziellen Spiegelungsmatrix durch Konjugation mit geeigneten Matrizen $T \in O(2, \mathbb{R})$.

14.4 Nullpunkt-erhaltende Symmetrien des Raumes

Aus Satz 14.11 (b) kann man ablesen, wie die orthogonalen Automorphismen eines 3-dimensionalen Euklidischen Vektorraums aussehen.

Lemma 14.13 *Sei V ein dreidimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ . Die orthogonalen Automorphismen $f \in O(V, \phi)$ lassen sich in folgende Familien einteilen. Jede Familie ist schon durch die Gestalt der charakteristischen Polynome $P_f(t)$ ihrer Mitglieder charakterisiert.*

$$(\alpha) \quad P_f(t) = (t - 1)^3: \text{ nur } \{\text{id}\}.$$

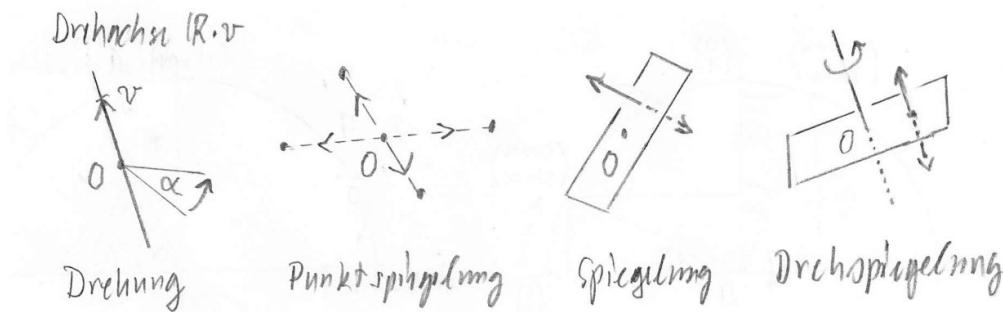
$$(\beta) \quad P_f(t) = (t - 1)^2(t + 1): f \text{ ist eine Spiegelung an der Ebene } \text{Eig}_{\mathbb{R}}(f, 1) \subset V.$$

$$(\gamma) \quad P_f(t) = (t - 1)(t + 1)^2: f \text{ ist eine Drehung um } \pi \text{ mit Drehachse } \text{Eig}(f, 1) \text{ und orthogonaler Drehebene } \text{Eig}(f, -1).$$

(δ) $P_f(t) = (t+1)^3$: nur $f = -\text{id}$. Das ist die Punktspiegelung am Nullpunkt. Es läßt sich mit beliebiger Drehachse auch als Drehspiegelung mit Drehung um π und anschließender Spiegelung an der zur Drehachse orthogonalen Ebene deuten.

(ε) $P_f(t) = (t-1)(t-e^{i\alpha})(t-e^{-i\alpha})$ mit $\alpha \in (0, 2\pi) - \{\pi\}$: f ist eine Drehung mit Drehwinkel α und Drehachse $\text{Eig}(f, 1)$.

(ζ) $P_f(t) = (t+1)(t-e^{i\alpha})(t-e^{-i\alpha})$ mit $\alpha \in (0, 2\pi) - \{\pi\}$: f ist eine Drehspiegelung. Es ist eine Komposition einer Drehung mit Drehwinkel α und Drehachse $\text{Eig}(f, -1)$ und einer Spiegelung an der zur Drehachse senkrechten Ebene. Die Reihenfolge ist egal, denn Drehung und Spiegelung kommutieren.



Die Fälle (α), (γ) und (ε) werden unter dem Begriff **Drehungen** zusammengefaßt, wobei id **unechte Drehung** genannt wird und (γ) und (ε) **echte Drehungen** sind. Die Fälle (β), (δ) und (ζ) werden unter dem Begriff **Drehspiegelungen** zusammengefaßt, wobei (β) **Spiegelungen** sind und (δ) und (ζ) **echte Drehspiegelungen** sind.

Insofern hat man vier Klassen: die Identität, echte Drehungen, Spiegelungen, echte Drehspiegelungen. Sie haben 0 bzw. 3 (Drehachse und Winkel) bzw. 2 (Spiegelungsebene) bzw. 3 (Drehachse und Winkel) Parameter. Die Drehungen f erfüllen $\det f = 1$ und sind orientierungserhaltend. Die Drehspiegelungen f erfüllen $\det f = -1$ und sind orientierungsumkehrend.

Beweis: Das folgt sofort aus Satz 14.11 (b) □

Bemerkungen 14.14 (i) Satz 14.11 (a) liefert zu den 6 Fällen (α) bis (ζ) im Lemma 14.13 die folgenden 6 Normalformen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{für } \alpha \in (0, 2\pi) - \{\pi\},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{für } \alpha \in (0, 2\pi) - \{\pi\}.$$

(ii) Die Punktspiegelung $-E_3$ kommutiert mit allen Elementen von $O(3, \mathbb{R})$. Daher ist

$$O(3, \mathbb{R}) = SO(3, \mathbb{R}) \cup SO(3, \mathbb{R}) \cdot (-E_3) = SO(3, \mathbb{R}) \times \{\pm E_3\}.$$

Also ist $O(3, \mathbb{R})$ als Gruppe das direkte Produkt der Gruppen $SO(3, \mathbb{R})$ und $\{\pm E_3\}$. Es bleibt zu verstehen, wie die Gruppe $SO(3, \mathbb{R})$ aussieht.

(iii) Bei einer echten Drehung wird die Wahl eines der beiden normierten erzeugenden Vektoren der Drehachse als Wahl einer *Orientierung der Drehachse* bezeichnet. Eine orientierte Drehachse und die *rechte Hand-Regel* bestimmen einen eindeutigen Drehwinkel $\alpha \in (0, 2\pi)$.



Bei einer Drehung um einen Winkel $\neq \pi$ gibt es eine eindeutige Orientierung der Drehachse, so dass mit der rechten Hand-Regel der Drehwinkel $\alpha \in (0, \pi)$ ist. Bei den Drehungen um π sind beide Orientierungen gleich gut.

(iv)

$$\begin{aligned} SO(3, \mathbb{R}) &= \{A \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal und } \det A = 1\} \\ &= \{A \in GL(3, \mathbb{R}) \mid A^{tr} = A^{-1}, \det A = 1\} \\ &\cong (\text{als Gruppe}) \{id\} \cup \{\text{Drehung an einer orientierten Achse} \\ &\quad \mathbb{R} \cdot v \text{ mit } v \in S^2 \text{ um einen Winkel } \alpha \in (0, \pi]\}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} &SO(3, \mathbb{R}) - \{\text{Drehungen an einer Achse } \mathbb{R} \cdot v \text{ um den Winkel } \pi\} \\ &\approx (\text{als Menge}) \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| < 1\} =: D^3 \quad (3\text{-Ball im } \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Hier entspricht $0 \in D^3$ der Identität und $v \in D^3 - \{0\}$ der Drehung an $\mathbb{R} \cdot v$ um den Winkel $\pi \cdot \|v\|$, wobei man die rechte Hand-Regel befolgt.

Die Drehungen um den Winkel π werden *nicht* durch S^2 parametrisiert, denn entgegengesetzte Punkte auf der S^2 geben dieselbe Drehung, da die Drehwinkel π und $-\pi$ modulo 2π gleich sind. Also erhält man $SO(3)$ aus $D^3 \cup S^2$, indem man entgegengesetzte Punkte von S^2 identifiziert, also $D^3 \cup S^2$ so entlang seines Randes S^2 mit sich selbst verklebt. Das gibt ein dreidimensionales Objekt, das nicht mehr als Teilmenge im $\mathbb{R}^3$ veranschaulicht werden kann. Aber es sieht lokal aus wie der $\mathbb{R}^3$. Es ist eine *orientierbare dreidimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand* (Definition nicht hier); genauer: es ist der reelle dreidimensionale projektive Raum $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ (Definition nicht hier). Im Unterkapitel 14.6 wird die Geometrie dieses Raumes und des verwandten Raumes $SU(2)$ durch zwei Experimente beleuchtet.

14.5 Die Platonischen Körper

Definition 14.15 (a) Ein *Halbraum* im $\mathbb{R}^3$ ist eine Menge $H \subset \mathbb{R}^3$ der Gestalt $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid l(x) \geq c\}$. Hier ist $l : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Linearform ungleich 0, und $c \in \mathbb{R}$. Die Punkte in H sind die Punkte auf einer Seite der Ebene $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid l(x) = c\}$. Bemerkung: Diese Ebene ist der Rand von H .

(b) Ein *konvexes Polyeder* ist eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^3$, die sich als Schnitt von endlich vielen Halbräumen darstellen läßt. Ein konvexes Polyeder A , das kompakt ist und innere Punkte hat (also Punkte, so daß ein kleiner Ball um sie in A enthalten ist), ist ein *Polytop*.

Bemerkung: Der Rand eines Polytops A besteht aus allen Punkten von A , die auf dem Rand von mindestens einem Halbraum in einer Darstellung von A als Schnitt von endlich vielen Halbräumen liegen.

(c) Es sei A ein Polytop. Offenbar ist der Rand von A die Vereinigung von *konvexen Polygonen* (= ein kompakter Schnitt von endlich vielen Halbräumen in einer Ebene, der innere Punkte hat). Es sei f die Anzahl der Polygone auf dem Rand, k die Anzahl der *Kanten* auf dem Rand, und e die Anzahl der *Ecken* auf dem Rand von A . (Diese Begriffe kann man auch noch formal sauber definieren, aber das sparen wir uns hier.) Weiter sei e_i für $i \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ die Anzahl der Ecken, von denen i Kanten ausgehen, und f_j für $j \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ sei die Anzahl der Polygone, die j -Ecke sind. Natürlich ist $e = \sum_i e_i$ und $f = \sum_j f_j$.

Satz 14.16 Für jedes Polytop A gilt die Eulersche Polyederformel

$$e - k + f = 2,$$

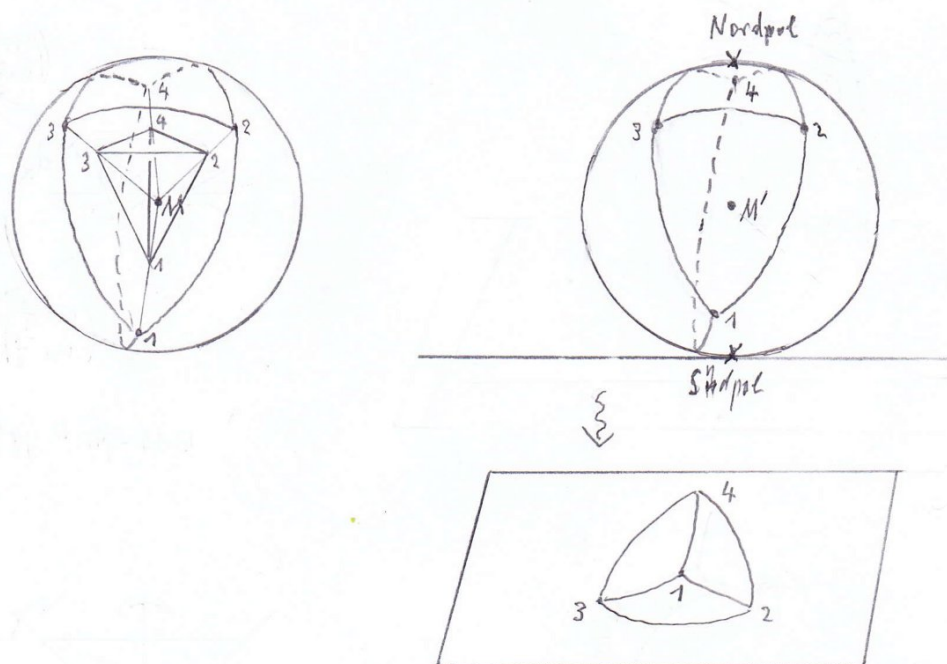
und es gelten die Formeln

$$2k = \sum_i i \cdot e_i, \quad 2k = \sum_j j \cdot f_j.$$

Beweis: Die zweite Formel folgt einfach, indem man von jeder Ecke aus die anliegenden Kanten zählt. Aufsummieren gibt die Zahl $\sum_i i \cdot e_i$. Da hat man jede Kante doppelt gezählt. Also ist $\sum_i i \cdot e_i = 2k$. Die dritte Formel folgt, indem man von jedem Polygon aus die Kanten auf seinem Rand zählt. Aufsummieren gibt die Zahl $\sum_j j \cdot f_j$. Da hat man auch jede Kante doppelt gezählt. Also ist $2k = \sum_j j \cdot f_j$.

Nun wird die Eulersche Polyederformel bewiesen. Weil das Polytop konvex ist, kann man eine Sphäre im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt M im Innern des Polytops finden, so dass die Projektion entlang der Strahlen mit Mittelpunkt M eine Bijektion vom Rand des Polytops auf die Sphäre ist. Dabei geht das Netz der Ecken und Kanten in einen Graphen auf der Sphäre über. Nun kann man die Sphäre so verschieben und drehen, dass ihr *Südpol* (=der tiefste Punkt bezüglich der 3. Koordinate) auf der Ebene $\mathbb{R} \cdot e_1 \oplus \mathbb{R} \cdot e_2$ liegt und Mittelpunkt M' hat und dass der *Nordpol* (=der höchste Punkt bezüglich der 3. Koordinate) nicht auf einer Kante oder Ecke des Graphen

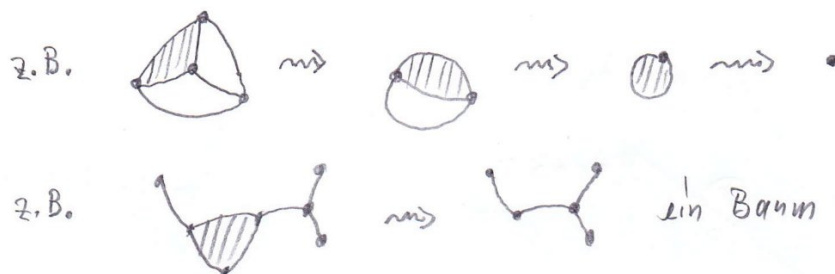
liegt. Die Projektion entlang der Strahlen vom *Nordpol* aus bildet die Sphäre ohne ihren Nordpol bijektiv auf die Ebene $\mathbb{R} \cdot e_1 \oplus \mathbb{R} \cdot e_2$ ab. Der Graph auf der Sphäre geht in einen Graphen auf der Ebene über.



Beim Graphen auf der Ebene ist f die Anzahl der Flächen inklusive der *äußeren Fläche*, k ist die Anzahl der Kanten, und e ist die Anzahl der Ecken.

Die Eulersche Polyederformel gilt nun für einen beliebigen zusammenhängenden Graphen in der Ebene. Man beweist sie leicht durch Induktion über die Anzahl $f + k + e$. Man zieht bei einem Graphen mit mindestens zwei Flächen eine Fläche inklusive aller Kanten und Ecken auf dem Rand dieser Fläche zu einem Punkt zusammen. Weil man auf dem Rand einer Fläche gleich viele Kanten und Ecken hat, bleibt die Zahl $e - k + f$ unverändert.

So macht man weiter, bis man nur noch die äußere Fläche hat. Dann ist der Graph nur noch ein Baum (ein Graph ohne Zykel – der Begriff ist selbsterklärend). Hier ist offenbar $e = k + 1$ und $f = 1$, also $e - k + f = 2$.



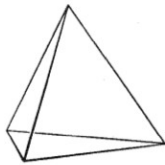
(Ein Graph wie in der zweiten Reihe links tritt natürlich bei einem Polytop nicht auf. Aber auch für ihn gilt die Eulersche Polyederformel.) $\square$

Definition 14.17 (a) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Ein reguläres n -Eck in einer Euklidischen Ebene ist ein n -Eck, dessen Kanten alle gleich lang sind, und dessen Innenwinkel alle gleich groß (also gleich $\pi \cdot \frac{n-2}{n}$) sind (denn die Innenwinkelsumme in einem n -Eck ist $(n-2)\pi$).

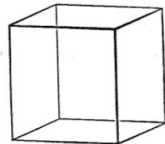
(b) Ein *Platonischer Körper* ist ein Polytop, so dass es ein n und ein $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ gibt, so dass alle Flächen im Rand des Polytops reguläre n -Ecke sind und so dass in jeder Ecke m reguläre n -Ecke aneinanderstoßen.

Bemerkungen: Dann ist $f = f_n$ und $e = e_m$. Alle Kanten sind automatisch gleich lang.

Satz 14.18 (Bekannt seit der Antike) Es gibt nach Wahl der Kantenlänge bis auf Drehungen und Verschiebungen im 3-dimensionalen Euklidischen Raum genau 5 Platonische Körper. Hier sind Bilder von ihnen und ihre Namen. Der Würfel heißt auch Hexaeder.



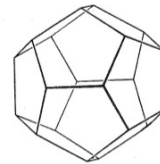
Tetraeder



Würfel



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder

Die folgende Tabelle gibt die Zahlen m, n, e, k, f (auswendig lernen):

m	n	$e = e_m$	k	$f = f_n$	
3	3	4	6	4	Tetraeder
3	4	8	12	6	Würfel = Hexaeder
4	3	6	12	8	Oktaeder
3	5	20	30	12	Dodekaeder
5	3	12	30	20	Ikosaeder

Die Flächenmittelpunkte eines Platonischen Körpers sind die Ecken eines anderen Platonischen Körpers. Das gibt eine Dualität zwischen Würfel und Oktaeder, eine Dualität zwischen Dodekaeder und Ikosaeder und eine Selbstdualität des Tetraeders.

Beweis: Sowohl Existenz als auch Eindeutigkeit der 5 Platonischen Körper müssen bewiesen werden.

Sei A ein Platonischer Körper, dessen Rand aus regulären n -Ecken für ein festes $n \geq 3$ besteht und bei dem in jeder Ecke $m \geq 3$ reguläre n -Ecke aneinanderstoßen.

Beim regulären n -Eck ist jeder Innenwinkel gleich $\pi \cdot \frac{n-2}{n}$. Es muß $m \cdot \pi \cdot \frac{n-2}{n} < 2\pi$ sein. Das schließt $n \geq 6$ aus und läßt nur die Möglichkeiten

$$(m, n) \in \{(3, 3), (4, 3), (5, 3), (3, 4), (3, 5)\}.$$

Bemerkung: Man kommt auf diese 5 Fälle auch mit den Formeln von Satz 14.16: $e = e_m$, $f = f_n$, $me_m = 2k = nf_n$,

$$\frac{2}{\min(m, n)} \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{e}{2k} + \frac{f}{2k} = \frac{2+k}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2},$$

also $\min(m, n) < 4$, also $\min(m, n) = 3$, und

$$\frac{1}{\max(m, n)} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad \text{also } \max(m, n) < 6, \quad \text{also } \max(m, n) \leq 5.$$

In jedem dieser 5 Fälle kann man eine Pyramide aus m regulären n -Ecken bilden, deren Basis ein reguläres m -Eck ist. Dann gibt es eine eindeutige Sphäre, so daß alle Ecken der m regulären n -Ecke auf dieser Sphäre liegen. Das folgt aus den Rechnungen auf Blatt 1 (LA IIb, FSS 2015).

So eine kreisförmige Anordnung von m regulären n -Ecken um eine Ecke wird nun kurzzeitig eine *Haube* genannt. Es ist klar, dass man an eine Haube weitere Hauben ankleben kann, so dass die äußeren Ecken der ersten Haube mittlere Ecken der neuen Hauben sind. Weiterhin liegen alle Ecken auf derselben Sphäre.

Es ist ziemlich klar, dass man bei Fortsetzung dieses Anklebens weiterer Hauben nicht immer neue Hauben erhält, die irgendwann ältere Hauben durchdringen, sondern dass sich die Hauben zum Rand eines Polytops zusammenfügen. Beim Tetraeder, Würfel und Oktaeder ist man schnell fertig. Beim Ikosaeder hat man nach der 2. Generation von Hauben schon 15 Dreiecke beisammen und ein reguläres Fünfeck als Rand. Man sieht, dass das Ankleben von Hauben mit den Ecken des Fünfecks als Mittelpunkten das Gebilde zum Ikosaeder schließt. Beim Dodekaeder fängt man vielleicht am besten mit 5 Hauben an, deren Mittelpunkte die Ecken eines Fünfecks F sind. Nach Ankleben von 5 weiteren Hauben, deren Mittelpunkte die 5 Ecken sind, die durch je eine Kante mit den Ecken des Fünfecks F verbunden sind, hat man ein Gebilde, dessen Rand ein reguläres Fünfeck ist. Damit ist man fertig und hat das Dodekaeder konstruiert.

Im Fall von Tetraeder, Würfel und Dodekaeder liegen an einer Ecke nur je 3 n -Ecke. Da kann man die Hauben nicht deformieren. Daher sind alle Tetraeder, Würfel bzw. Dodekaeder *kongruent*, das heißt, sie lassen sich durch Drehungen und Verschiebungen ineinander überführen.

Beim Oktaeder hat man einen Freiheitsgrad, mit dem man eine Haube deformieren kann. Aber die Basis einer deformierten Haube liegt nicht mehr in einer Ebene. Man sieht leicht, dass man deformierte Hauben nicht zu einem (deformierten) Oktaeder zusammensetzen kann. Beim Ikosaeder hat man zwei (!) Freiheitsgrade, mit denen man eine Haube deformieren kann. Da ist es weniger leicht zu sehen, dass man

deformierte Hauben nicht zu einem (deformierten) Ikosaeder zusammensetzen kann. Der Beweis wird hier nicht ausgeführt. Mit undeformierten Hauben kommt man auch beim Oktaeder und beim Ikosaeder nur zu kongruenten Körpern.

Die letzte Aussage des Satzes, dass die Flächenmittelpunkte eines Platonischen Körpers die Ecken eines anderen sind, und welche Platonischen Körper dadurch dual zueinander sind, sieht man direkt. $\square$

Satz 14.19 (a) (Definition) Seien nun P_T, P_O und P_I je ein fest gewähltes Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder im Euklidischen Vektorraum $M(3 \times 1, \mathbb{R})$ mit Mittelpunkt gleich dem Nullpunkt. Die Untergruppen der $SO(3, \mathbb{R})$ der Drehungen, die P_T bzw. P_O bzw. P_I auf sich abbilden, werden $\text{Sym}_{or}(P_T)$ bzw. $\text{Sym}_{or}(P_O)$ bzw. $\text{Sym}_{or}(P_I)$ genannt.

Notation: Sie sind Gruppen vom Typ $\mathcal{T}$ bzw. $\mathcal{O}$ bzw. $\mathcal{I}$. Diese Symbole bezeichnen auch ihre Konjugationsklassen in $SO(3, \mathbb{R})$.

(b) Wegen der Dualität zwischen Oktaeder und Würfel ist $\text{Sym}_{or}(P_O)$ auch die Gruppe der Drehungen, die den Würfel auf sich abbilden, dessen Ecken die Flächenmittelpunkte von P_O sind. Wegen der Dualität zwischen Ikosaeder und Dodekaeder ist $\text{Sym}_{or}(P_I)$ auch die Gruppe der Drehungen, die den Dodekaeder auf sich abbilden, dessen Ecken die Flächenmittelpunkte von P_I sind.

(c) In jedem der 3 Fälle sei

$X :=$ Anzahl der Drehachsen eines Typs,

$Y :=$ Anzahl der Drehungen um Drehachsen eines Typs.

(Die folgenden Tabellen erklären, was mit Drehachsen eines Typs gemeint ist.) Die folgenden Tabellen sagen einiges über die 3 Symmetriegruppen in (a) aus.

Tetraeder P_T :

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
—	—	0	(id :) 1
4	durch Ecken und gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$
3	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	$3 \cdot 1 = 3$

$$\Rightarrow |\text{Sym}_{or}(P_T)| = 1 + 8 + 3 = 12.$$

Oktaeder P_O :

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
—	—	0	(id :) 1
3	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi$	$3 \cdot 3 = 9$
6	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	$6 \cdot 1 = 6$
4	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$

$$\Rightarrow |\text{Sym}_{or}(P_O)| = 1 + 9 + 6 + 8 = 24.$$

Ikosaeder P_I :

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
—	—	0	(id :) 1
6	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi$	$6 \cdot 4 = 24$
15	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	$15 \cdot 1 = 15$
10	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$	$10 \cdot 2 = 20$

$$\Rightarrow |\text{Sym}_{or}(P_I)| = 1 + 24 + 15 + 20 = 60.$$

(d) Als abstrakte Gruppen sind die Gruppen zu folgenden (Unter)Gruppen symmetrischer Gruppen isomorph:

$$\text{Sym}_{or}(P_T) \cong A_4,$$

$$\text{Sym}_{or}(P_O) \cong S_4,$$

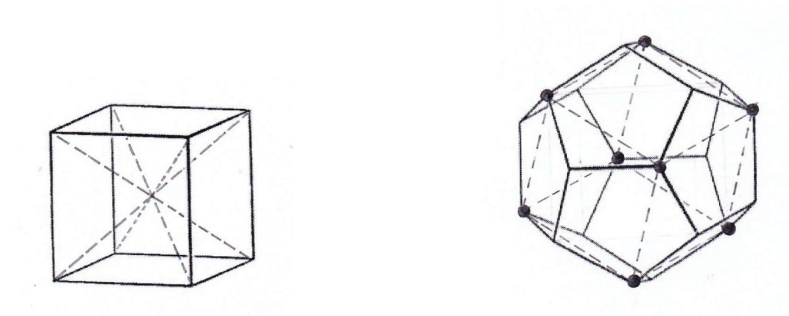
$$\text{Sym}_{or}(P_I) \cong A_5.$$

Beweisskizze: (a) Definition. (b) Das sieht man. (c) Das sieht man.

(d) Bei $\text{Sym}_{or}(P_T)$ werden die 4 Ecken des Tetraeders permutiert. Man sieht leicht, dass die Drehungen genau die geraden Permutationen geben.

Bei $\text{Sym}_{or}(P_O)$ muß man die Operation auf den 4 Raumdiagonalen im Würfel ansehen. Jedes Element von $\text{Sym}_{or}(P_O)$ permutiert diese. Wegen $|\text{Sym}_{or}(P_O)| = 24 = |S_4|$ wird jede Permutation als Drehung realisiert.

Bei $\text{Sym}_{or}(P_I)$ muß man zuerst einmal wissen und verstehen, dass es im Dodekaeder genau 5 regelmäßige Würfel gibt, deren Ecken Ecken des Platonischen Körpers sind. Diese werden durch die Drehungen in $\text{Sym}_{or}(P_I)$ permutiert. Es erfordert aber noch Anstrengung zu sehen, daß genau die geraden Permutationen realisiert werden. Das wird hier nicht geleistet. $\square$



Bemerkungen 14.20 (i) In Aufgabe 3 von Blatt 3 im FSS 2015 wird gezeigt, dass die Abbildung

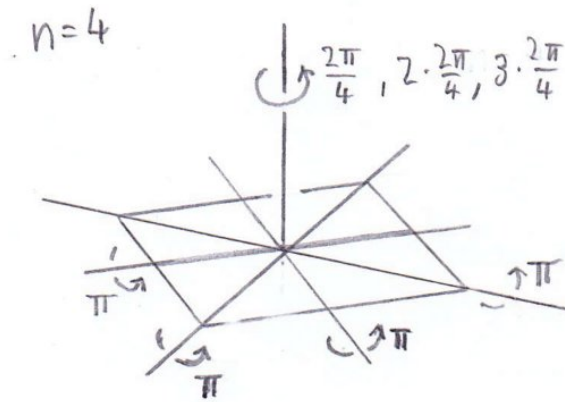
$$\Psi : O(2, \mathbb{R}) \rightarrow SO(3, \mathbb{R}), \quad A \mapsto B := \begin{pmatrix} & 0 \\ A & \\ 0 & 0 \quad \det A \end{pmatrix},$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist und folgendes erfüllt: Beschreibt A eine Drehung um einen Winkel α , so beschreibt B eine Drehung an der Drehachse $\mathbb{R} \cdot e_3^{(3)}$ um den Winkel α . Beschreibt A eine Spiegelung an der Achse $c_1 e_1^{(2)} + c_2 e_2^{(2)} \in \mathbb{R}^2$ (mit $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$), so beschreibt B eine Drehung an der Drehachse $c_1 e_1^{(3)} + c_2 e_2^{(3)} \in \mathbb{R}^3$ um den Winkel π .

(ii) Damit kann man die endlichen Untergruppen von $O(2, \mathbb{R})$, die ja in Satz 14.8 beschrieben waren, in $SO(3, \mathbb{R})$ einbetten.

Die Gruppe $\Psi(C_n^{(2)}) \subset SO(3, \mathbb{R})$ ist die Gruppe der Drehungen mit Drehachse $\mathbb{R} \cdot e_3^{(3)}$ und Drehwinkeln $2\pi \frac{k}{n}$ mit $0 \leq k < n$. Ihr Konjugationsklasse in $SO(3, \mathbb{R})$ wird mit $C_n^{(3)}$ bezeichnet. Die Gruppen in dieser Konjugationsklasse unterscheiden sich nur durch die jeweilige Drehachse.

Ist $G \subset O(2, \mathbb{R})$ eine Gruppe vom Typ $D_{2n}^{(2)}$, also eine Diedergruppe, die neben $C_n^{(2)}$ noch n Spiegelungen enthält, so ist $\Psi(G)$ eine Diedergruppe ganz aus Drehungen. Die Untergruppe $\Psi(C_n^{(2)})$ ist vom Typ $C_n^{(3)}$. Die weiteren Drehungen sind Drehungen um π an Achsen in der Ebene senkrecht zur Drehachse $\mathbb{R} \cdot e_3^{(3)}$ von $\Psi(C_n^{(2)})$. Die Konjugationsklasse in $SO(3, \mathbb{R})$ von $\Psi(G)$ wird mit $D_{2n}^{(3)}$ bezeichnet. Jede Gruppe in $D_{2n}^{(3)}$ ist die Gruppe aller Drehungen des $M(3 \times 1, \mathbb{R})$, die ein festes reguläres n -Eck mit Mittelpunkt 0 (in einer Ebene) im $M(3 \times 1, \mathbb{R})$ auf sich abbilden. (So ein reguläres n -Eck ist ein Polyeder ohne innere Punkte.)



Satz 14.21 (Hier ohne Beweis) Die einzigen Konjugationsklassen endlicher Untergruppen von $SO(3, \mathbb{R})$ sind die Klassen $C_n^{(3)}$ ($n \geq 1$), $D_{2n}^{(3)}$ ($n \geq 2$), $\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$ und $\mathcal{I}$.

Einen Beweis findet man z.B. im Buch *Algebra* von M. Artin (Birkhäuser Verlag, 1998, im Abschnitt 5.9).

14.6 Zwei Experimente zu $SU(2)$ und $SO(3, \mathbb{R})$

Beispiel 14.22

$$\begin{aligned}
 SU(2) &= \{A \in M(2 \times 2, \mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär und } \det A = 1\} \\
 &= \{A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid \overline{A}^{tr} = A^{-1}, \det A = 1\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1, \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\} \\
 &\approx (\text{als Menge}) \{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4 \mid a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1\} \\
 &= S^3 \quad (3\text{-Sphäre im } \mathbb{R}^4).
 \end{aligned}$$

Bemerkungen 14.23 Zur Geometrie von $SO(3, \mathbb{R})$ gibt es zwei schöne Experimente. Für eine saubere Diskussion braucht man Begriffe der *Topologie*, siehe unten 14.24. Aber man kann die Experimente auch ohne diese Begriffe ganz gut verstehen, und es lohnt sich.

Das 1. Experiment: Man legt ein Buch auf einen (etwa den rechten) Handteller und dreht es immer weiter in einer Richtung in der horizontalen Ebene. Dabei hält man den Oberkörper gerade, nimmt aber eine Zeitlang Verdrillungen des Armes und der Hand in Kauf und führt das Buch sogar unter der Armbeuge durch.

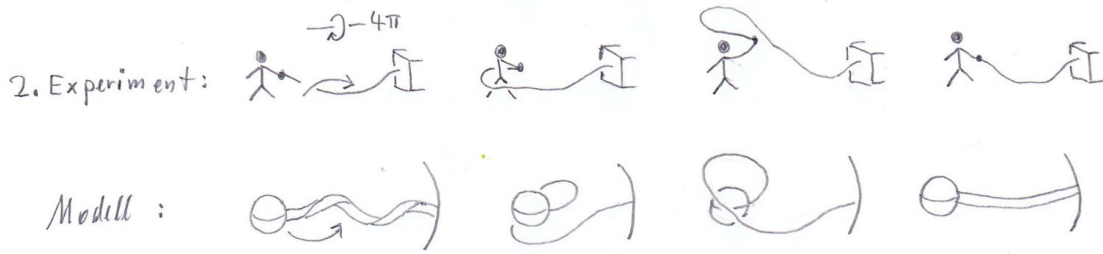


Nachdem das Buch um insgesamt 4π gedreht worden ist, ist der Arm wieder entspannt in der Ausgangslage.

Warum bei 4π ? Warum überhaupt? Warum nicht schon bei 2π ?

Um das zu verstehen, wird das Experiment gleich in Mathematik übersetzt.

Das 2. Experiment: Man hängt ein geschlossenes Band von 5-10 Metern Länge um einen Stuhl, hält es mit der linken Hand und stellt sich so, dass es einigermaßen gespannt ist. Dann verdrillt man es (mit Hilfe der rechten Hand) nach rechts um 4π und hält es ab da und bis zum Ende des Experiments wieder mit der linken Hand fest. Nun steigt man von rechts nach links über das Band und führt das Band hintenrum über den Kopf nach vorne. Der Oberkörper bleibt dem Stuhl zugewandt. Am Ende ist das Band unverdrillt vor einem.



Dieses 2. Experiment ist nah verwandt zum 1. Experiment. Im folgenden wird nur das 1. Experiment diskutiert.

Übersetzen des 1. Experiments in Formeln: Man hat einen Zeit-Parameter $t \in [0, 1] =: I$ (I steht für Intervall) und einen Parameter $x \in I$ für die Punkte auf einer gewählten Kurve, die vom Buchmittelpunkt durch Hand und Arm bis zu einem Punkt in der Schulter läuft.

Dann hat man erst einmal eine stetige Positionsfunktion

$$P : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, t) \mapsto P(x, t),$$

die zu jedem Zeitpunkt die Lage im $\mathbb{R}^3$ des Punktes x der Kurve im Arm zum Zeitpunkt t angibt. Man hat aber auch eine stetige Verdrillungsfunktion

$$G : I \times I \rightarrow SO(3, \mathbb{R}), (x, t) \mapsto G(x, t),$$

die zu jedem Zeitpunkt angibt, wie sehr der Arm am Punkt x zum Zeitpunkt t gegenüber seiner Ausgangslage zum Zeitpunkt 0 verdreht worden ist.

Tatsächlich ist die Funktion P irrelevant. Wir vergessen sie ab jetzt. Die Funktion G ist dagegen entscheidend. Sie muß folgende Zusatzbedingungen erfüllen:

$G(1, t) = E_3$: der Punkt in der Schulter wird nicht verdreht;

$$G(0, t) \in \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\} =: S_{hor}^1 :$$

das Buch wird nur horizontal gedreht;

$G(x, 0) = E_3$: zum Referenzzeitpunkt $t = 0$ ist natürlich nichts verdreht;

$G(x, 1) = E_3$: zum Zeitpunkt $t = 1$ ist der Arm wieder in Ausgangslage.

Die geschlossene Kurve $S_{hor}^1 \subset SO(3, \mathbb{R})$ ist natürlich eine Untergruppe der $SO(3, \mathbb{R})$, und das Bild einer bijektiven und stetigen Abbildung $S^1 \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$.

Formalisierung der Fragen oben (warum 4π ? etc): Nun kann man ansetzen, daß man eine stetige Funktion $g : I \rightarrow S_{hor}^1$ mit $g(1) = g(0) = E_3$ gegeben habe. Sie beschreibt einen Kandidaten für eine Familie (in einem Zeit-Parameter) von Verdrehungen des Buches auf dem Handteller.

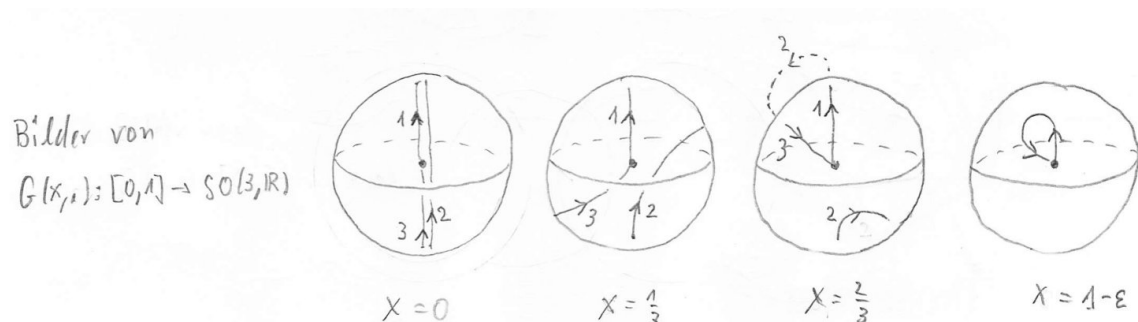
Zu so einer Funktion gibt es eine eindeutige stetige Funktion

$$\alpha[g] : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad g(t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha[g](t) & -\sin \alpha[g](t) & 0 \\ \sin \alpha[g](t) & \cos \alpha[g](t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha[g](0) = 0.$$

Dann ist die *Gesamtverdrehung* zu g definiert als $\alpha[g](1)$, und das ist ein Vielfaches von 2π . Der folgende Satz beantwortet die Fragen und erklärt das Experiment.

Satz: Zu einem g wie oben gibt es genau dann ein G wie oben mit $g = G(0, \cdot)$, wenn die Gesamtverdrehung $\alpha[g](1)$ von g ein Vielfaches von 4π ist.

Beweisidee zu $\Leftarrow$: Es reicht, die spezielle (aber typische) Abbildung g mit $\alpha[g](t) = 4\pi \cdot t$ zu betrachten. Man muß eine Familie $G(x, \cdot)$ von Wegen in $SO(3, \mathbb{R})$ finden, die den Weg $g = G(0, \cdot)$ stetig in den "trivialen" Weg $G(1, \cdot) : I \rightarrow \{E_3\}$ deformiert. Daß das geht, zeigt folgendes Bild.



Zu $\Rightarrow$: Man muß einsehen, daß es im Fall der Abbildung g mit $\alpha[g](t) = 2\pi \cdot t$ keine solche Familie von Wegen gibt. Das ist nach der Skizze zwar schon ein bisschen anschaulich. Aber bewiesen werden soll es hier nicht. $(\square)$

Bemerkungen 14.24 Begriffe, die hinter den Experimenten in 14.23 stehen:

(i) Für jede Teilmenge Y des $\mathbb{R}^N$ (und allgemeiner für jeden *topologischen Raum* Y) und jeden Punkt $y \in Y$ kann man eine *Fundamentalgruppe* $\pi_1(Y, y)$ folgendermaßen definieren:

$$\begin{aligned} \Omega(Y, y) &:= \{g : I \rightarrow Y \mid g \text{ stetig}, g(0) = g(1) = y\} \\ &= \text{die Menge der geschlossenen Wege in } Y \\ &\quad \text{mit Anfangs- und Endpunkt } y, \end{aligned}$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\Omega(Y, y)$:

$f \sim g \iff \text{Def } \exists G : I \times I \rightarrow Y \text{ stetig, so daß gilt:}$

$$G(0, t) = f(t), \quad G(1, t) = g(t), \quad G(x, 0) = G(x, 1) = y.$$

$$\pi_1(Y, y) := \Omega(Y, y) / \sim.$$

Auf $\Omega(Y, y)$ ist folgende Verknüpfung definiert: Bei $f, g \in \Omega(Y, y)$ ist $f \circ g \in \Omega(Y, y)$ die Abbildung mit

$$(f \circ g)(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Lemma: $[f_1] = [f_2], [g_1] = [g_2] \Rightarrow [f_1 \circ g_1] = [f_2 \circ g_2]$.

Daher hat man eine Gruppenstruktur auf $\pi_1(Y, y)$.

In diesem Rahmen kann man das Problem in 14.23 gut verstehen. Die Bewegung des gesamten Armes gibt eine Deformation der Bewegung des Buches zur trivialen Bewegung der Punktes in der Schulter. Ein geschlossener Weg in $SO(3, \mathbb{R})$ ist genau dann mit dem Handteller und dem Arm ausführbar, wenn seine Klasse in $\pi_1(SO(3, \mathbb{R}), E_3)$ trivial ist. Eine Umformulierung und Präzisierung des Satzes oben ist der folgende Satz.

Satz: $\pi_1(SO(3, \mathbb{R}), E_3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und $[g] \cong [\frac{\alpha[g](1)}{2\pi} \bmod 2\mathbb{Z}] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Also ist die Klasse $[g]$ in $\pi_1(SO(3, \mathbb{R}), E_3)$ von $g : I \rightarrow S_{hor}^1$ wie oben genau dann trivial, wenn $\alpha[g](1) \in 4\pi\mathbb{Z}$ ist.

(ii) Der Beweis dieses Satzes benutzt eine natürliche 2-zu-1-Abbildung $S^3 \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$, die man erhält, wenn man S^3 aus zwei Kopien von $\overline{D^3}$ zusammensetzt (etwas analoges geht auch in den Dimensionen 1 und 2). Diese Abbildung ist die *universelle Überlagerung* von $SO(3, \mathbb{R})$, und es ist $\pi_1(S^3, pt) \cong \{1\}$. Auch die Beschreibung $SU(2) \approx S^3$ in 14.22 paßt ins Bild. Die induzierte Abbildung $SU(2) \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$ ist ein Gruppenhomomorphismus, und sie läßt sich präzise mit den *Hamilton-Quaternionen* beschreiben.

15 Symmetrien der Ebene und des Raumes

15.1 Isometrien

Definition 15.1 (a) (Erinnerung an Lineare Algebra I im HWS 2014, Definition 9.13 (a)) Sei X irgendeine nichtleere Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt **Metrik**, falls sie erfüllt:

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

$$(M2) \quad d(y, x) = d(x, y).$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (Dreiecksungleichung).}$$

Dann heißt X *metrischer Raum* (eigentlich ist das Paar (X, d) gemeint).

(b) Sei X ein metrischer Raum mit Metrik d . Eine *Isometrie* von X ist ein bijektive Selbstabbildung $f : X \rightarrow X$, die die Metrik respektiert, d.h. mit

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \text{für } x, y \in X.$$

(c) Sei X ein metrischer Raum mit Metrik d . Die Menge aller Isometrien von (X, d) ist $\text{Isom}(X, d)$. Offenbar ist es eine Gruppe.

Wenn genug Zeit ist, wird in einem späteren Kapitel ein ganz neuer metrischer Raum eingeführt werden, die *hyperbolische Ebene*, und ihre Isometrien werden studiert werden. Aber in diesem Kapitel geht es um Isometrien von Euklidischen Vektorräumen, vor allem Isometrien der Ebene $\mathbb{R}^2$ und des Raumes $\mathbb{R}^3$.

Lemma 15.2 (Erinnerung an Lineare Algebra I im HWS 2014, Lemma 9.13 (b) und Bemerkung 9.14) Sei V ein n -dimensionaler ($n \in \mathbb{N}$) Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ . Dann ist V mit

$$d(x, y) := \|x - y\| := \sqrt{\phi(x - y, x - y)}$$

ein metrischer Raum.

Beweis: Das war in Korollar 9.12 und Lemma 9.13 (b) bewiesen worden. Der Knackpunkt war die Dreiecksungleichung. Sie folgte aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. $\square$

Wegen Satz 14.3 (b) ist jeder orthogonale Automorphismus eines n -dimensionalen Euklidischen Vektorraums V eine Isometrie von V als metrischem Raum. Lemma 15.3 vervollständigt diese Aussage.

Lemma 15.3 Sei V ein n -dimensionaler Euklidischer Vektorraum. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \{f : V \rightarrow V \text{ Isometrie mit } f(0) = 0\} \\ &= \{f : V \rightarrow V \text{ orthogonaler Automorphismus von } V\}. \end{aligned}$$

Beweis: $\supset$ folgt aus Satz 14.3 (b).

$\subset$: Das Skalarprodukt kann mit Hilfe des Abstandes zum Nullpunkt ausgedrückt werden,

$$\begin{aligned} 2 \cdot \phi(x, y) &= \phi(x, x) + \phi(y, y) - \phi(x - y, x - y) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 \\ &= d(x, 0)^2 + d(y, 0)^2 - d(x, y)^2. \end{aligned}$$

Sei $f : V \rightarrow V$ eine Isometrie mit $f(0) = 0$. Weil f Abstände und den Nullpunkt erhält, erhält f das Skalarprodukt ϕ .

Es bleibt zu zeigen, dass f linear ist. Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine ON-Basis von V . Dann sind auch die Vektoren $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ orthonormal zueinander. Sie sind linear unabhängig, denn wäre etwa $f(b_1) = \sum_{j=2}^n \lambda_j \cdot f(b_j)$, so wäre für $k = 2, \dots, n$

$$0 = \phi(b_1, b_k) = \phi(f(b_1), f(b_k)) = \sum_{j=2}^n \lambda_j \cdot \phi(b_j, b_k) = \lambda_k,$$

also $f(b_1) = 0$, im Widerspruch zu $\|f(b_1)\| = \|b_1\| = 1$. Daher ist $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ eine ON-Basis.

Für ein beliebiges $x = \sum_{j=1}^n x_j \cdot b_j \in V$ ist

$$\phi(f(x), f(b_j)) = \phi(x, b_j) = x_j,$$

also ($\overset{*}{=}$ gilt, weil $f(b_1), \dots, f(b_n)$ eine ON-Basis ist)

$$f\left(\sum_{j=1}^n x_j \cdot b_j\right) = f(x) \overset{*}{=} \sum_{j=1}^n \phi(f(x), f(b_j)) \cdot f(b_j) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot f(b_j).$$

Daraus folgt die Linearität von f . Also ist f ein orthogonaler Automorphismus. $\square$

Der nächste Satz 15.5 wird zeigen, dass man allgemeine Isometrien Euklidischer Vektorräume (endlicher Dimension) aus *Translationen* und orthogonalen Automorphismen zusammensetzen kann.

Definition 15.4 In (a)–(e) sei V ein Vektorraum beliebiger Dimension über einem beliebigen Körper.

(a) Eine *Translation* ist eine Selbstabbildung der Gestalt

$$T_a : V \rightarrow V, \quad v \mapsto v + a,$$

für ein $a \in V$. Offenbar ist T_a bijektiv, und offenbar ist der *Translationsvektor* a durch $T_a(0) = a$ eindeutig bestimmt.

(b) (Triviales Lemma) Die Menge aller Translationen ist offenbar eine abelsche Gruppe isomorph zu $(V, +)$. Es ist $T_a \circ T_b = T_{a+b}$ für $a, b \in V$ und insbesondere $T_a^{-1} = T_{-a}$. Diese Gruppe wird $\text{Transl}(V)$ genannt.

(c) Eine Abbildung $f : V \rightarrow V$ heißt *affin linear*, falls sie Komposition $f = T_a \circ g$ einer Translation T_a ($a \in V$) und eines linearen Endomorphismus $g : V \rightarrow V$ ist. Falls g ein Automorphismus ist, heißt f *Affinität* oder *affin linearer Automorphismus*.

(d) Eine *Gerade* (oder auch *affine Gerade*) ist eine Menge der Gestalt $a + K \cdot v$ für ein $v \in V - \{0\}$ und ein $a \in V$. Eine affine Gerade ist also das Bild $T_a(K \cdot v)$ einer Geraden $K \cdot v$ durch 0 unter einer Translation T_a .

(e) (Triviales Lemma) Eine Translation bildet Geraden auf Geraden ab. Ein linearer Automorphismus bildet Geraden auf Geraden ab (denn $f(a + K \cdot v) = f(a) + K \cdot f(v)$). Eine Affinität bildet Geraden auf Geraden ab.

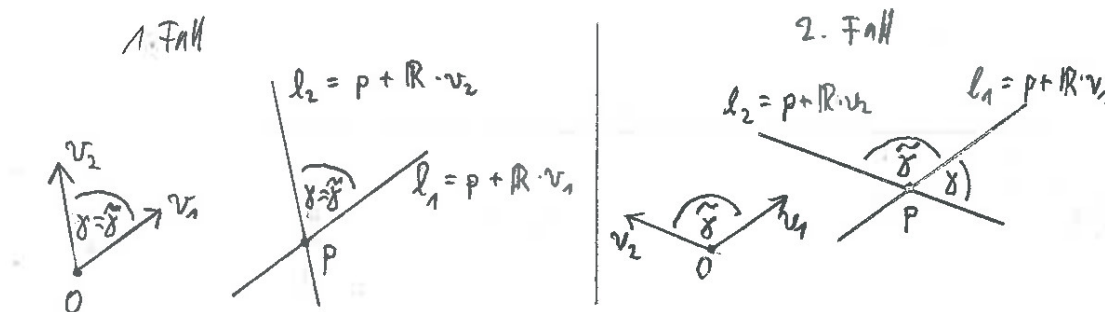
(f) Sei V ein n -dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ . Seien l_1 und l_2 zwei Geraden, die sich in einem Punkt $p \in V$ schneiden. Dann ist der Winkel zwischen l_1 und l_2 wohldefiniert. Bei $l_1 = p + \mathbb{R} \cdot v_1$ und $l_2 = p + \mathbb{R} \cdot v_2$ ist er der Winkel $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit

$$\cos \gamma = \frac{|\phi(v_1, v_2)|}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}.$$

Wenn man die Geraden l_1 und l_2 mit v_1 und v_2 *orientiert* (Definition 15.7), ist der Winkel zwischen den orientierten Geraden der Winkel $\tilde{\gamma} \in [0, \pi]$ zwischen v_1 und v_2 , also der durch

$$\cos \tilde{\gamma} = \frac{\phi(v_1, v_2)}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}.$$

bestimmte Winkel. Offenbar ist $\gamma = \tilde{\gamma}$ oder $\gamma = \pi - \tilde{\gamma}$, je nachdem, was kleiner ist.



Satz 15.5 Sei V ein n -dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ .

(a) Sei $T_a : V \rightarrow V$ für ein $a \in V$ eine Translation. Sie ist eine Isometrie von V . Sie erhält die Winkel zwischen Geraden. (Aber Skalarprodukt und Länge (=Norm) von Vektoren bleiben bei $a \neq 0$ im allgemeinen nicht erhalten.)

(b) Sei $f : V \rightarrow V$ eine Isometrie. Sei $g := T_{-f(0)} \circ f$. Dann ist g ein orthogonaler Automorphismen von V , und es gilt

$$f = T_{f(0)} \circ g = g \circ T_{-f^{-1}(0)}.$$

f ist eine Affinität und bildet Geraden auf Geraden ab und erhält die Winkel zwischen Geraden.

(c) Die Abbildung

$$\text{Transl}(V) \times O(V, \phi) \rightarrow \text{Isom}(V, d), \quad (T_a, g) \mapsto T_a \circ g$$

ist bijektiv. Die Abbildung

$$\Psi : \text{Isom}(V, d) \mapsto O(V, \phi), \quad f \mapsto g := T_{-f(0)} \circ f$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\text{Transl}(V)$. Die Abbildung $f \mapsto (T_{f(0)}, g)$ ist die Umkehrabbildung zur 1. Abbildung oben.

(d) Bemerkung: Die Translationen und die orthogonalen Automorphismen kommutieren im allgemeinen nicht. Daher ist $\text{Isom}(V, \phi)$ zwar als Menge, aber nicht als Gruppe isomorph zu $\text{Transl}(V) \times O(V, \phi)$. Wegen der Aussagen in (c) sagt man aber, daß diese beiden Gruppen ein **semidirektes Produkt von Gruppen** bilden. Notation: $\text{Transl}(V) \rtimes O(V, \phi)$.

Beweis: (a) T_a ist eine Isometrie, denn

$$d(T_a(x), T_a(y)) = d(x + a, y + a) = \|(x + a) - (y + a)\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

Der Rest ist auch klar.

(b) Offenbar gilt $g(0) = (T_{-f(0)} \circ f)(0) = -f(0) + f(0) = 0$. Wegen Lemma 15.3 ist g ein orthogonaler Automorphismus. Nach Definition von g ist $f = T_{f(0)} \circ g$. Und das ist gleich zu $g \circ T_{-f^{-1}(0)}$, denn

$$(T_{f(0)} \circ g)(x) = f(0) + g(x) = g(x + g^{-1}(f(0))) = g \circ T_{g^{-1}(f(0))}(x)$$

und

$$f^{-1} = g^{-1} \circ T_{-f(0)},$$

also $f^{-1}(0) = g^{-1}(-f(0) + 0) = -g^{-1}(f(0))$.

Weil f eine Affinität ist, bildet f Geraden auf Geraden ab.

Das Bild unter g von zwei Geraden $p + K \cdot v_1$ und $p + K \cdot v_2$ ist $g(p) + K \cdot g(v_1)$ und $g(p) + K \cdot g(v_2)$. Wegen $\phi(v_1, v_2) = \phi(g(v_1), g(v_2))$ ist der Winkel zwischen den Ausgangsgeraden gleich dem Winkel zwischen den Bildgeraden. Daher erhalten g und dann auch f die Winkel zwischen Geraden.

(c) Wegen (b) ist die erste Abbildung surjektiv. Wegen $(T_a \circ g)(0) = a$ kann man aus $T_a \circ g$ die Zahl a und die Translation T_a und dann auch g rekonstruieren. Also ist die erste Abbildung auch injektiv.

Wegen der doppelten Formel in (b) gibt es zu jedem Produkt $g \circ T_b$ mit $g \in O(V, \phi)$ und $b \in V$ ein $c \in V$ mit $g \circ T_b = T_c \circ g$. Bei $f_1 = T_{f_1(0)} \circ g_1$ und $T_{f_2(0)} \circ g_2$ gilt $f_1 \mapsto g_1$, $f_2 \mapsto g_2$, und

$$f_1 \circ f_2 = (T_{f_1(0)} \circ g_1) \circ (T_{f_2(0)} \circ g_2) = (T_{f_1(0)} \circ T_{f_2(0)}) \circ g_1 \circ g_2, \quad \text{also} \quad f_1 \circ f_2 \mapsto g_1 \circ g_2.$$

Daher ist die zweite Abbildung in (c) ein Gruppenhomomorphismus. Surjektiv ist sie sowieso. Daß der Kern genau aus den Translationen besteht, ist auch klar. $\square$

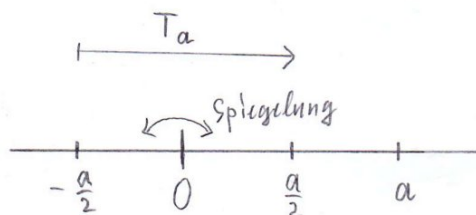
Satz 15.5 gibt ein zufriedenstellendes generelles Verständnis von der Art, wie sich allgemeine Isometrien Euklidischer Vektorräume in Teile (Translationen und orthogonale Automorphismen) zerlegen lassen. Unterkapitel 14.3 hatte die orthogonalen Automorphismen genau studiert. Wir werden ihr Zusammenspiel mit den Translationen in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ im Unterkapitel 15.2 ansehen.

Beispiele 15.6 (i) Ein orthogonaler Automorphismus $f \in O(V, \phi)$ eines n -dimensionalen Euklidischen Vektorraums V ist *orientierungserhaltend*, falls $\det f = 1$ ist, und *orientierungsumkehrend*, falls $\det f = -1$ ist, vgl. das Ende von Kapitel 7. Eine Isometrie f ist orientierungserhaltend/umkehrend, wenn der Anteil $g = \Psi(f) \in O(V, \phi)$ orientierungserhaltend/umkehrend ist.

(ii) $n = 1$, $K = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} SO(1, \mathbb{R}) &= \{E_1\} = \{(1)\} \\ O(1, \mathbb{R}) &= \{(1), (-1)\} \cong O(\mathbb{R}, \phi_{st}), \\ \text{Isom}(\mathbb{R}, \phi_{st}) &= \text{Transl}(\mathbb{R}) \rtimes O(\mathbb{R}, \phi_{st}) \\ &= \{\text{Translationen}\} \cup \{\text{Spiegelungen}\} \cong \mathbb{R} \times \{1\} \cup \mathbb{R} \times \{-1\}, \\ T_a \circ (\text{Spiegelung an } 0) &= (\text{Spiegelung an } \frac{a}{2}) \\ &= T_{a/2} \circ (\text{Spiegelung an } 0) \circ T_{-a/2}, \end{aligned}$$

denn $\frac{a}{2}$ ist der einzige *Fixpunkt* von $T_a \circ (\text{Spiegelung an } 0)$.



15.2 Symmetrien der Ebene und des Raumes

Nach Satz 15.5 (b) ist jede Isometrie eines n -dimensionalen Euklidischen Vektorraums eine Komposition aus einem orthogonalen Automorphismus und einer Translation. Im Fall von $n = 2$ und $n = 3$ gaben die Unterkapitel 14.2 und 14.4 ein gutes Verständnis der orthogonalen Automorphismen: Es waren im Fall $n = 2$ Drehungen und Spiegelungen (und id als unechte Drehung) und im Fall $n = 3$ Drehungen und Drehspiegelungen (mit Spiegelungen als speziellen Drehspiegelungen und id als unechter Drehung).

In diesem Unterkapitel werden allgemeine Isometrien in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ ähnlich genau studiert. Es wird sich zeigen, dass da viel mehr gesagt werden kann, als dass sie Kompositionen aus Translationen und orthogonalen Automorphismen sind.

Definition 15.7 Sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum ($n \in \mathbb{N}$).

(a) Zwei Basen von V heißen *orientierungsäquivalent*, falls die Basiswechselmatrizen positive Determinante haben.

(b) (Triviales Lemma) Es gibt nur zwei Äquivalenzklassen orientierungsäquivalenter Basen.

(c) Dann ist eine *Orientierung* von V die Auszeichnung einer der beiden Äquivalenzklassen von orientierungsäquivalenten Basen.

Bemerkungen 15.8 Zum Beispiel erlaubt es eine Orientierung bei einem 2-dimensionalen Euklidischen Vektorraum, die ON-Basen in der ausgezeichneten Äquivalenzklasse orientierungsäquivalenter Basen zu betrachten. Dann kann man eine solche ON-Basis (e_1, e_2) wählen und jeder Drehung f um 0 den Drehwinkel $\alpha \in [0, 2\pi[$ mit $f(e_1) = \cos \alpha \cdot e_1 + \sin \alpha \cdot e_2$ zuordnen. Dann schreibt man sie als Drehung d_α .

Für abstrakte Resultate braucht man keine Orientierung, aber für Formeln mit Winkeln ist eine Orientierung nötig.

Beim $\mathbb{R}^n$ hat man von der Standardbasis her eine natürliche Orientierung.

Definition 15.9 Sei V ein 2-dimensionaler Euklidischer Vektorraum, und sei $f : V \rightarrow V$ eine Isometrie von V .

(a) f ist eine *Drehung*, falls ein $p \in V$ und eine Drehung $d \in SO(V, \phi)$ um 0 existieren, so dass $f = T_p \circ d \circ T_{-p}$ ist.

Notation: Wenn V orientiert und $d = d_\alpha$ mit $\alpha \in [0, 2\pi[$ ist, ist $f = d_{\alpha,p}$. Dann ist f die Drehung mit Winkel α um den Punkt p .

(b) f ist eine *Spiegelung*, falls eine Gerade $L = p + \mathbb{R} \cdot v \subset V$ existiert, so dass $f = T_p \circ s_v \circ T_{-p}$ ist. Hier ist $s_v \in O(V, \phi)$ die Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot v \subset V$.

Notation: $f = s_L$, f ist die Spiegelung an der Geraden L .

(c) f ist eine *Gleit Spiegelung*, falls ein Vektor $v \in V - \{0\}$ und eine Gerade $L = p + \mathbb{R} \cdot v \subset V$ existieren, so dass $f = T_v \circ s_L$ ist.

Notation: $f = g_{v,L}$, f ist die Gleit Spiegelung an der Geraden L mit Translationsvektor v (in Richtung der Geraden L). Bemerkung: T_v und s_L kommutieren.

Satz 15.10 Sei V ein 2-dimensionaler Euklidischer Vektorraum.

(a) Die Isometrien von V , die Fixpunkte haben, lassen sich über ihre Fixpunkt mengen charakterisieren, und sie ergeben sich durch Konjugation mit Translationen aus den orthogonalen Automorphismen: Es gibt nur die Identität id (Fixpunktmenge = V),

die Drehungen (Fixpunktmenge = der Punkt, um den gedreht wird) und die Spiegelungen (Fixpunktmenge = die Gerade, an der gespiegelt wird).

(b) Zu diesen 3 Klassen kommen 2 Klassen von Isometrien hinzu, die keine Fixpunkte haben: die Translationen und die Gleitspiegelungen.

(c) Die Kompositionen von Drehungen und Spiegelungen mit Translationen sind Elemente in folgenden Klassen:

$$\begin{aligned} \text{Translation} \circ \text{id} &= \text{Translation}, \\ \text{Translation} \circ (\text{echte Drehung}) &\in \{\text{echte Drehungen}\}, \\ \text{Translation} \circ \text{Spiegelung} &\in \{\text{Spiegelungen}\} \cup \{\text{Gleitspiegelungen}\}. \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der Parameter für die verschiedenen Typen:

id	Translationen	Drehungen	Spiegelungen	Gleitspiegelungen
0	2	3	2	3

Beweis: (a) Sei f eine Isometrie mit einem Fixpunkt $p \in V$. Dann ist $g := T_{-p} \circ f \circ T_p$ eine Isometrie mit Fixpunkt 0, Nach Lemma 15.3 ist g ein orthogonaler Automorphismus, also ist $g = \text{id}$ mit Fixpunktmenge V oder eine echte Drehung um 0 mit Fixpunktmenge $\{0\}$ oder eine Spiegelung an einer Geraden L durch 0 mit Fixpunktmenge L . Die Konjugation $T_p \circ g \circ T_{-p} = f$ hat die Fixpunktmenge

$$(\text{Fixpunktmenge von } f) = (\text{Fixpunktmenge von } g) + p$$

und ist nach Definition 15.9 gleich id oder eine Drehung oder eine Spiegelung.

(b) Die Translationen T_a , $a \in V - \{0\}$, sind natürlich Isometrien ohne Fixpunkte. Auch die Gleitspiegelungen sind Isometrien ohne Fixpunkte.

Es bleibt zu zeigen, dass das alle Isometrien ohne Fixpunkte sind.

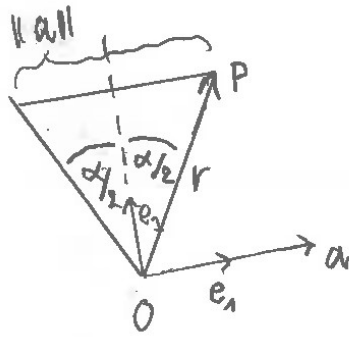
Sei nun eine Orientierung von V gewählt. Wegen Satz 15.5 (b) muß bloß gezeigt werden, dass $\text{Translation} \circ (\text{echte Drehung um } 0)$ wieder eine echte Drehung ist, und dass $\text{Translation} \circ (\text{Spiegelung an einer Geraden durch } 0)$ eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung ist.

Jede orientierungserhaltende Isometrie, die nicht id oder eine Translation oder eine Drehung um 0 ist, hat die Gestalt $f = T_a \circ d_\alpha$ mit $a \in V - \{0\}$ und $\alpha \in]0, 2\pi[$. Sei $e_1 := a/\|a\|$ und $e_2 := d_{\pi/2}(e_1)$. Dann ist (e_1, e_2) eine richtig orientierte ON-Basis von V . Die folgende Skizze zeigt, dass

$$p := \frac{\|a\|}{2} (e_1 + \cot \frac{\alpha}{2} \cdot e_2) = r \sin \frac{\alpha}{2} \cdot e_1 + r \cos \frac{\alpha}{2} \cdot e_2 \quad \text{mit} \quad r := \frac{\|a\|/2}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

ein Fixpunkt von f ist. Daher ist

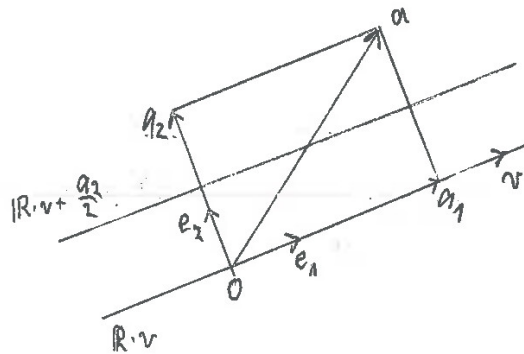
$$T_a \circ d_\alpha = d_{\alpha,p} = T_p \circ d_\alpha \circ T_{-p} = \text{eine Drehung.}$$



Jede orientierungsumkehrende Isometrie hat die Gestalt $f = T_a \circ s_v$ mit $a \in V$ und $v \in V - \{0\}$. Sei $e_1 := v/\|v\|$ und $e_2 := d_{\pi/2}(e_1)$. Dann ist (e_1, e_2) eine richtig orientierte ON-Basis von V , und $a = a_1 + a_2$ mit geeigneten $a_1 \in \mathbb{R}e_1$ und $a_2 \in \mathbb{R}e_2$. Die folgende Skizze zeigt, dass die Gerade $E := \mathbb{R} \cdot v + \frac{a_2}{2}$ die Fixpunktmenge von $T_{a_2} \circ s_v$ ist. Daher ist $T_{a_2} \circ s_v = s_E$, und es gilt

$$T_a \circ s_v = T_{a_1} \circ (T_{a_2} \circ s_v) = T_{a_1} \circ s_E$$

Die rechte Seite $T_{a_1} \circ s_E$ ist offensichtlich eine Gleitspiegelung, falls $a_1 \neq 0$ ist, und eine Spiegelung, falls $a_1 = 0$ ist.



(c) Dass jede Komposition in der jeweils angegebenen Menge liegt, beweist man durch eine leichte Verallgemeinerung des Beweises von (b).

Bei den Translationen ist die Anzahl der Parameter gleich $\dim V = 2$. Bei den echten Drehungen kann man den eindeutigen Fixpunkt in V und den Drehwinkel beliebig wählen. Das gibt $2 + 1 = 3$ Parameter. Bei den Spiegelungen wählt man nur die Spiegelungsgerade. Das gibt 1 Parameter für ihre Richtung und 1 Parameter für den Abstand zur 0. Bei den Gleitspiegelungen hat man 1 Parameter mehr als bei den Spiegelungen, die Strecke der Translation entlang der Spiegelungsgeraden. $\square$

Definition 15.11 Sei V ein 3-dimensionaler Euklidischer Vektorraum, und sei $f : V \rightarrow V$ eine Isometrie von V .

(a) f ist eine *Drehung*, falls ein $p \in V$ und eine Drehung $d \in SO(V, \phi)$ existieren, so dass $f = T_p \circ d \circ T_{-p}$ ist.

Notation: Wenn V orientiert und $d = d_{L, \alpha}$ mit orientierter Drehachse L und Drehwinkel $\alpha \in [0, 2\pi[$ ist, so wird $f = d_{L+p, \alpha}$ geschrieben, f ist die Drehung mit orientierter Drehachse $L + p$ und Drehwinkel α .

(b) f ist eine *Schraubung*, falls eine echte Drehung $d \in \text{Isom}(V, \phi)$ und eine Translation T_a mit $a \in V - \{0\}$ existieren, so dass die Drehachse die Gestalt $p + \mathbb{R} \cdot a$ für ein $p \in V$ hat und so dass $f = T_a \circ d$ ist.

Bemerkung: Dann kommutieren T_a und d .

(c) f ist eine *Spiegelung*, falls eine Ebene E durch 0 und ein $p \in V$ existieren, so dass $f = T_p \circ s_E \circ T_{-p}$ ist. Hier ist s_E die Spiegelung an der Ebene $E \subset V$.

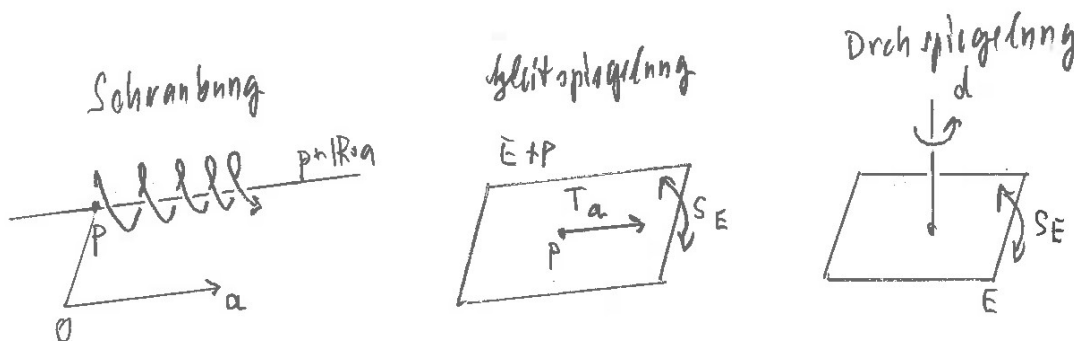
Notation: $f = s_{E+p}$, f ist die Spiegelung an der *affinen* Ebene $E + p$.

(d) f ist eine *Gleitspiegelung*, falls ein Vektor $v \in V - \{0\}$ und eine Ebene $E + p$ mit $E \subset V$ eine 2-dimensionaler Untervektorraum und ein $v \in E$ existieren, so dass $f = T_v \circ s_{E+p}$ ist.

Bemerkung: Dann kommutieren T_v und s_{E+p} .

(e) f ist eine *Drehspiegelung*, falls eine echte Drehung $d \in \text{Isom}(V, \phi)$ und eine Spiegelung $s_E \in \text{Isom}(V, \phi)$ existieren, so dass Drehachse und Spiegelungsebene senkrecht zueinander sind und so dass $f = d \circ s_E$ ist.

Bemerkung: Dann kommutieren d und s_E .



Satz 15.12 Sei V ein 3-dimensionaler Euklidischer Vektorraum.

(a) Die Isometrien von V , die Fixpunkte haben, lassen sich über ihre Fixpunktmenge charakterisieren, und sie ergeben sich durch Konjugation mit Translationen aus den orthogonalen Automorphismen: Es gibt nur die Identität id (Fixpunktmenge = V), die Drehspiegelungen (Fixpunktmenge = der Schnittpunkt von Drehachse und Spiegelungsebene), die Drehungen (Fixpunktmenge = die Gerade, um die gedreht wird) und die Spiegelungen (Fixpunktmenge = die Ebene, an der gespiegelt wird).

(b) Zu diesen 4 Klassen kommen 3 Klassen von Isometrien hinzu, die keine Fixpunkte haben: die Translationen, die Gleitspiegelungen und die Schraubungen.

(c) Die Kompositionen von Drehungen und Spiegelungen mit Translationen sind Elemente in folgenden Klassen:

$$\begin{aligned} \text{Translation} \circ \text{id} &= \text{Translation}, \\ \text{Translation} \circ (\text{echte Drehung}) &\in \{\text{echte Drehungen}\} \cup \{\text{Schraubungen}\}, \\ \text{Translation} \circ \text{Spiegelung} &\in \{\text{Spiegelungen}\} \cup \{\text{Gleitspiegelungen}\}, \\ \text{Translation} \circ \text{Drehspiegelung} &\in \{\text{Drehspiegelungen}\}. \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der Parameter für die verschiedenen Typen:

id	Translationen	Drehungen	Schraubungen	Spiegelungen	Gleitsp.	Drehsp.
0	3	5	6	3	5	6

Beweis: (a) Sei f eine Isometrie mit einem Fixpunkt $p \in V$. Dann ist $g := T_{-p} \circ f \circ T_p$ eine Isometrie mit Fixpunkt 0, Nach Lemma 15.3 ist g ein orthogonaler Automorphismus, also ist $g = \text{id}$ mit Fixpunktmenge V oder eine echte Drehung an einer Geraden durch 0 oder eine Spiegelung an einer Ebene durch 0 oder eine Drehspiegelung mit $\{0\}$ als Fixpunktmenge. Die Konjugation $T_p \circ g \circ T_{-p} = f$ hat die Fixpunktmenge

$$(\text{Fixpunktmenge von } f) = (\text{Fixpunktmenge von } g) + p$$

und ist nach Definition 15.11 gleich id oder eine Drehung oder eine Spiegelung oder eine Drehspiegelung.

(b) Die Translationen T_a , $a \in V - \{0\}$, sind natürlich Isometrien ohne Fixpunkte. Auch die Gleitspiegelungen und Schraubungen sind Isometrien ohne Fixpunkte. Es bleibt zu zeigen, dass das alle Isometrien ohne Fixpunkte sind. Wegen Satz 15.5 (b) muß bloß gezeigt werden, dass

$$\begin{aligned} \text{Translation} \circ (\text{echte Drehung an einer Geraden durch } 0) &\in \{\text{echte Drehungen}\} \\ &\quad \cup \{\text{Schraubungen}\}, \\ \text{Translation} \circ (\text{Spiegelung an einer Ebene durch } 0) &\in \{\text{Spiegelungen}\} \\ &\quad \cup \{\text{Gleitspiegelungen}\}, \\ \text{Translation} \circ (\text{Drehspiegelung mit Fixpunkt } 0) &\in \{\text{Drehspiegelungen}\} \end{aligned}$$

gilt.

Sei nun eine Orientierung von V gewählt. Sei $a \in V - \{0\}$, sei $L = \mathbb{R} \cdot v$ eine Gerade mit Orientierung gegeben durch $v \in V - \{0\}$, und sei $\alpha \in]0, 2\pi[$. Sei $a = a_1 + a_2$ mit $a_2 \in \mathbb{R} \cdot v$ und $a_1 \in E := (\mathbb{R} \cdot v)^\perp$.

1. Fall, Drehung oder Schraubung: Es muß gezeigt werden, dass $T_a \circ d_{L,\alpha}$ eine echte Drehung oder eine Schraubung ist.

Offenbar bildet $T_{a_1} \circ d_{L,\alpha}$ alle zu E parallelen Ebenen auf sich ab. Nach dem Beweis von Satz 15.10 (b) ist $T_{a_1} \circ d_{L,\alpha} = d_{L+p,\alpha}$ die Drehung an der Geraden $L + p$ mit einem $p \in E$, das wie im Beweis von Satz 15.10 (b) bestimmt wird. Dann ist

$$T_a \circ d_{L,\alpha} = T_{a_2} \circ T_{a_1} \circ d_{L,\alpha} = T_{a_2} \circ d_{L+p,\alpha}$$

Bei den Translationen ist die Anzahl der Parameter gleich $\dim V = 3$.

Bei den echten Drehungen kann man die orientierte Drehgerade und den Drehwinkel in $]0, \pi]$ wählen. Bei der Drehgerade muß man die Richtung und einen Basispunkt wählen, wobei eine 1-Parameter-Familie von Basispunkten dieselbe Drehgerade gibt. Das gibt $(2 + (3 - 1)) + 1 = 5$ Parameter.

Bei den Schraubungen trifft man die gleichen Wahlen wie bei den Drehungen und wählt zusätzlich die Strecke der Translation. Das gibt $5 + 1 = 6$ Parameter.

Bei den Spiegelungen wählt man nur die Spiegelungsebene. Das gibt 2 Parameter für ihre Richtung und 1 Parameter für den Abstand zur 0, also $2 + 1 = 3$ Parameter.

Bei den Gleitspiegelungen hat man 2 Parameter mehr als bei den Spiegelungen, den Translationsvektor innerhalb der Spiegelungsebene.

Bei den Drehspiegelungen hat man 3 Parameter mehr als bei den Spiegelungen, also 6 Parameter. Man wählt den Punkt in der Spiegelungsebene, in dem die Spiegelungsebene die Drehgerade trifft, und den Winkel der Drehung, zusammen sind das $2 + 1 = 3$ zusätzliche Parameter. $\square$

15.3 Friesgruppen

Definition 15.13 (a) Eine Untergruppe $G \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^n, \phi_{st})$ heißt *diskret*, falls das Bild $\Psi(G)$ unter der Abbildung

$$\Psi : \text{Isom}(\mathbb{R}^n, \phi_{st}) \rightarrow O(\mathbb{R}^n, \phi_{st}), f \mapsto g := T_{-f(0)} \circ f$$

endlich ist und falls die Translationsuntergruppe $G \cap \text{Transl}(\mathbb{R}^n)$ von den Translationen um Vektoren $a_1, \dots, a_k$ mit $0 \leq k \leq n$ erzeugt wird, wobei $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind.

(b) Zwei diskrete Untergruppen G_1 und G_2 von $\text{Isom}(\mathbb{R}^n, \phi_{st})$ heißen *ähnlich*, falls es eine Affinität (Definition 15.4 (c)) $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$G_2 = \{A^{-1} \circ g \circ A \mid g \in G_1\}$$

gibt. Ähnlichkeit ist offenbar eine Äquivalenzrelation.

(c) Die diskreten Untergruppen im Fall $(n, k) = (2, 1)$ heißen *Friesgruppen*.

(d) Ein *Fries* ist eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^2$, so dass $\{f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2, \phi_{st}) \mid f(M) = M\}$ eine Friesgruppe ist. Sie ist die *Symmetriegruppe* des Frieses.

(e) Die diskreten Untergruppen im Fall $(n, k) = (n, n)$ heißen (für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$) *kristallographische Raumgruppen*. Im Fall $(n, k) = (2, 2)$ heißen sie auch *Ornamentgruppen* (auf englisch *wallpaper groups*). Die Sätze 15.16 und 15.20 machen Aussagen über sie.

Satz 15.14 (a) Es gibt 7 Ähnlichkeitsklassen von Friesgruppen. Sie werden $F_1, F_2, F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_2^1$ und F_2^2 genannt.

(b) Die folgende Tabelle gibt zu jeder der 7 Klassen einen Ausschnitt eines Frieses, so dass die Symmetriegruppe des Frieses eine Gruppe $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_1^1, \tilde{F}_1^2, \tilde{F}_1^3, \tilde{F}_2^1, \tilde{F}_2^2$ in der Klasse $F_1, F_2, F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_2^1, F_2^2$ ist. Hier ist $\tilde{F}_1 = \{T_{(b,0)} \mid b \in \mathbb{Z}\}$, und $\tilde{F}_1$ ist die Translationsuntergruppe der anderen 6 Gruppen. Rechts in der Tabelle stehen einige Zusatzinformationen. $\bar{F}_2$ ist eine weitere Friesgruppe in der Klasse F_2 , bei der die Drehpunkte gegenüber der Gruppe $\tilde{F}_2$ entlang der Längsachse um $\frac{1}{4}$ (z.B. nach rechts) verschoben sind.



$$\tilde{F}_1 = \{T_{(b,0)} \mid b \in \mathbb{Z}\}$$



$$\tilde{F}_2 \supset \{\text{gewisse Drehungen um } \pi\}$$



$$\tilde{F}_1^1 \supset \{\text{Spiegelung an einer Längsachse,} \\ \text{gewisse Gleitspiegelungen}\}$$



$$\tilde{F}_1^2 \supset \{\text{Spiegelungen an gewissen Querachsen}\}$$



$$\tilde{F}_1^3 \supset \{\text{gewisse Gleitspiegelungen}\}$$

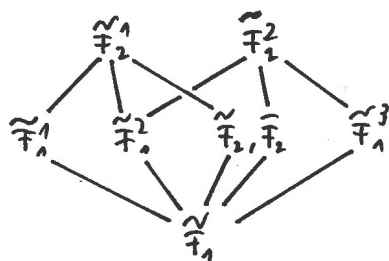


$$\tilde{F}_2^1 \supset \tilde{F}_1^1 \cup \tilde{F}_1^2 \cup \tilde{F}_2$$

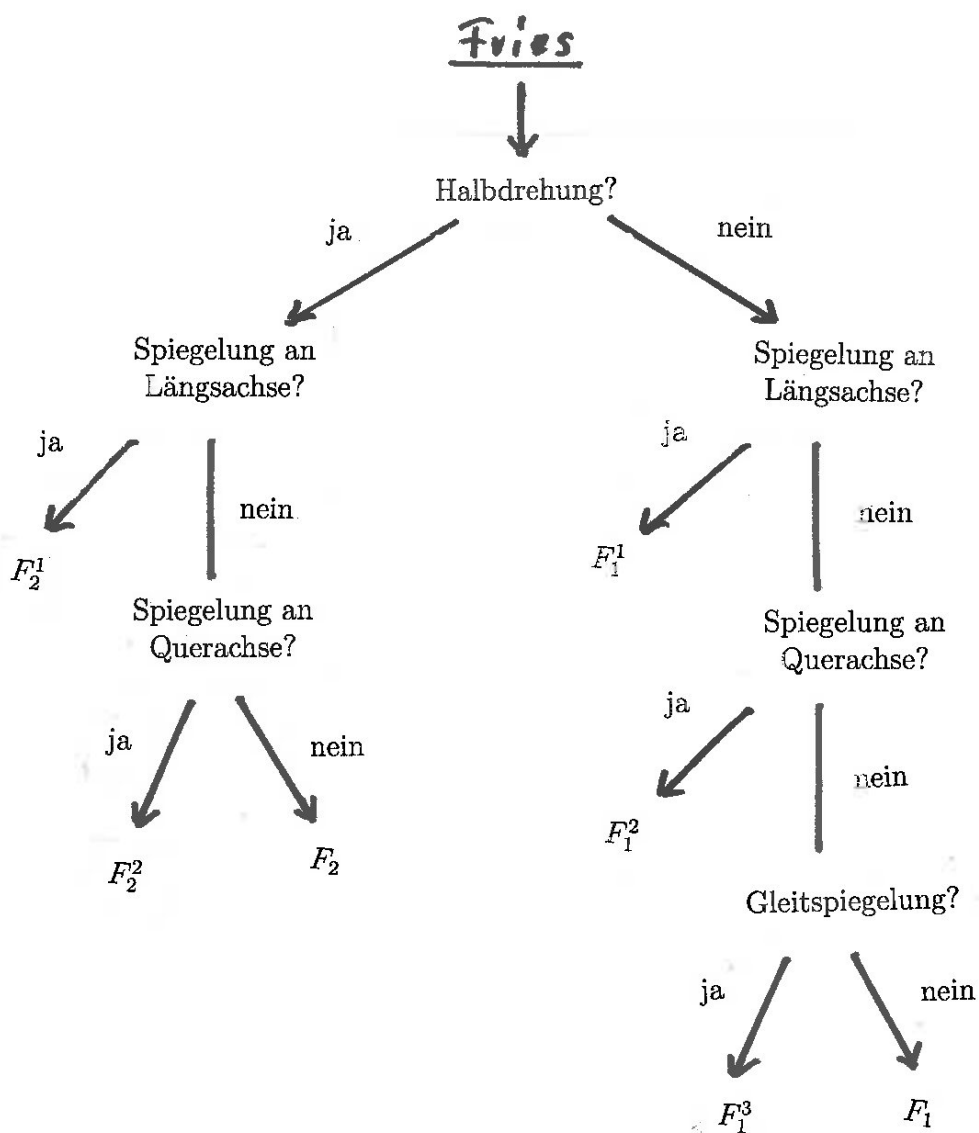


$$\tilde{F}_2^2 \supset \tilde{F}_1^2 \cup \bar{F}_2 \cup \tilde{F}_1^3$$

(c) Die 8 Gruppen $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_1^1, \tilde{F}_1^2, \tilde{F}_1^3, \tilde{F}_2^1, \tilde{F}_2^2$ und $\bar{F}_2$ in (b) erfüllen die Untergruppenbeziehungen im folgenden Diagramm. Hier ist eine untere Gruppe in einer oberen Gruppe enthalten, wenn eine oder zwei (zwei nur bei $\tilde{F}_1 \subset \tilde{F}_2^1, \tilde{F}_1 \subset \tilde{F}_2^2$) Kanten sie verbindet. Die untere Gruppe ist dann ein Normalteiler in der oberen Gruppe, und die Quotientengruppe hat 2 (bei 1 Kante) bzw. 4 (bei 2 Kanten) Elemente.



(d) Das folgende Diagramm gibt einen Algorithmus, mit dem man die Symmetriegruppe eines gegebenen Frieses bestimmen kann.



Ein Teil von Satz 15.14 wird nach den Beispielen 15.15 bewiesen.

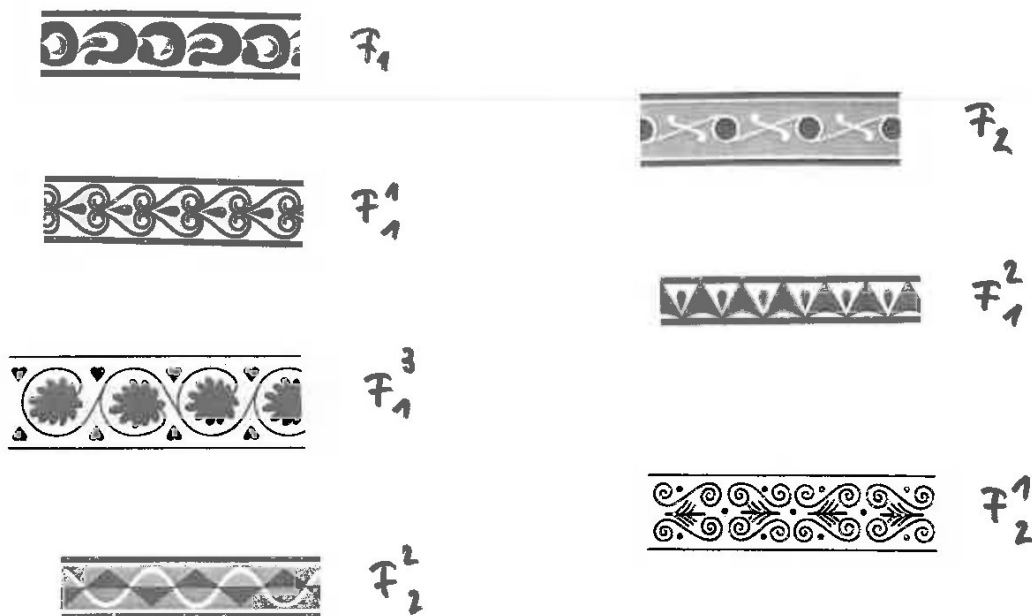
Beispiele 15.15 (i) Wiederholung des Buchstaben A gibt ein Fries ...AAAAAAAAA... mit Symmetriegruppe in der Klasse von F_1^2 . Wiederholung des Buchstaben Z gibt ein Fries ...ZZZZZZZZZ... mit Symmetriegruppe in der Klasse von F_2 .

Die folgende Tabelle gibt für zwölf Großbuchstaben die Klasse der Symmetriegruppe des Frieses an, das man durch Wiederholung des Buchstabens erhält.

A	B	E	F	H	L	M	O	R	T	Y	Z
F_1^2	F_1^1	F_1^1	F_1	F_2^1	F_1	F_1^2	F_2^1	F_1	F_1^2	F_1^2	F_2

Ein Fries mit Ausschnitt ...LFLFLFLFL... hat eine Symmetriegruppe der Klasse F_1^3 . Ein Fries mit Ausschnitt ...VAVAVAVAV... hat eine Symmetriegruppe der Klasse F_2^2 . Mit einem einzelnen Großbuchstaben kann man Friesen mit diesen Symmetriegruppen nicht herstellen.

(ii) Die folgenden sieben Bilder zeigen Ausschnitte von Friesen. Rechts von den Bildern stehen die Klassen der Symmetriegruppen dieser Friesen.



Beweis eines Teils von Satz 15.14: Zu jeder Friesgruppe G gibt es eine ähnliche Friesgruppe mit Translationsgruppe gleich $\tilde{F}_1$: Man muß nur eine Affinität $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ angeben, deren linearer Anteil die Gruppe $\{a \in \mathbb{R}^2 \mid T_a \in G \cap \text{Transl}(\mathbb{R}^2)\}$ auf die Gruppe $\{(b, 0) \mid b \in \mathbb{Z}\}$ abbildet.

Ab jetzt sei G eine Friesgruppe mit Translationsuntergruppe gleich $\tilde{F}_1$.

Sei $f = T_a \circ g \in G$ eine Isometrie in G mit linearem Anteil $g \in O(\mathbb{R}^2, \phi_{st})$. Es ist

$$\begin{aligned} (f \circ T_{(1,0)} \circ f^{-1})(x) &= (T_a \circ g \circ T_{(1,0)} \circ g^{-1} \circ T_{-a})(x) \\ &= (T_a \circ g \circ T_{(1,0)})(g^{-1}(x - a)) \\ &= T_a(g((1,0)) + g(g^{-1}(x - a))) = g((1,0)) + x \\ &= T_{g((1,0))}(x), \quad \text{also} \\ f \circ T_{(1,0)} \circ f^{-1} &= T_{g((1,0))}. \end{aligned}$$

Diese Translation ist in G , also in der Translationsuntergruppe $\tilde{F}_1$ von G . Daher ist $g((1,0)) = \pm(1,0)$. Das ist der Schlüssel für eine Klassifikation der möglichen Elemente von G .

Falls f und g Drehungen sind, folgt, daß $g = \pm \text{id}$ ist, also die Identität oder die Drehung um π mit Drehpunkt 0. Im ersten Fall ist $f = T_a$. Im zweiten Fall ist auch f eine Drehung um π . Dann erzeugen f und $\tilde{F}_1$ eine Gruppe in der Klasse F_2 . Die Elemente $T_{(b,0)} \circ f$ mit $b \in \mathbb{Z}$ sind die Drehungen. Ihre Drehpunkte sind die Elemente der Menge (Drehpunkt von f) + $\{\frac{1}{2}(b,0) \mid b \in \mathbb{Z}\}$.

Falls f eine Gleitspiegelung oder eine Spiegelung ist, so ist g entweder die Spiegelung an der Längsachse $\mathbb{R} \times \{0\}$ oder die Spiegelung an der Querachse $\{0\} \times \mathbb{R}$.

Im zweiten Fall ist auch f die Spiegelung an einer Querachse $\{c\} \times \mathbb{R}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Im zweiten Fall erzeugen f und $\tilde{F}_1$ in der Klasse F_1^2 .

Im ersten Fall ist $f^2 = (T_a \circ g)^2 = T_{2a} \in \tilde{F}_1$, also $a \in \mathbb{Z} \cdot (\frac{1}{2}, 0)$.

1. UNTERFALL, $a \in \mathbb{Z}$: Dann erzeugen f und $\tilde{F}_1$ eine Gruppe in der Klasse F_1^1 .
2. UNTERFALL, $a \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$: Dann erzeugen f und $\tilde{F}_1$ eine Gruppe in der Klasse F_1^3 .

Der weitere Beweis besteht hauptsächlich darin einzusehen, daß die einzigen Friesgruppen, deren Translationsuntergruppe $\tilde{F}_1$ ist und die mindestens zwei der gerade konstruierten Gruppen in den Klassen F_2, F_1^2, F_1^1, F_1^3 enthalten, Gruppen in den Klassen F_2^1 oder F_2^2 sind.

Das wird als (nicht so leichte) Übung offen gelassen. Die Ausarbeitung der Lösung liefert (a) bis (d). $\square$

15.4 Ornamentgruppen

Satz 15.16 *Die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen von kristallographischen Raumgruppen (Definition 15.13 (e)) wird in den Fällen $n = 2, 3, 4, 5, 6$ in der folgenden Tabelle gegeben.*

n	2	3	4	5	6
	17	219	4783	222018	28927915

Wenn man bei der Definition von Ähnlichkeit nur orientierungserhaltende Affinitäten zuläßt, bleibt es im Fall $n = 2$ bei 17 Klassen. Aber im Fall $n = 3$ zerfallen 11 der

219 Klassen in je 2 Klassen. Also hat man da dann 230 orientierte Ähnlichkeitsklassen von kristallographischen Gruppen.

Zum Fall $n = 2$, also zum Fall der 17 Ornamentgruppen, gibt Satz 15.20 mehr Details.

Zum Beweis: Der Fall $n = 2$ wurde 1891 von Jewgraf Stepanowitsch Fedorow gefunden und 1924 von George Pólya und Paul Niggli wiederentdeckt. Schon 1890 hatte Fedorow den Fall $n = 3$ studiert. Die Klassifikation im Fall $n = 4$ stammt aus den 70er Jahren, die Fälle $n = 5$ und $n = 6$ sind jünger und haben sicher erheblichen Computereinsatz erfordert. $\square$

Nun soll ein Eindruck von den 17 Klassen von Ornamentgruppen, also den kristallographischen Raumgruppen im Fall $n = 2$, gegeben werden. Das geschieht in zwei Schritten. Im ersten Schritt in Satz 15.18 werden 5 verschiedene *Typen von Gittern* betrachtet.

Definition 15.17 Ein *Gitter* im $\mathbb{R}^n$ ist eine Untergruppe $G \subset \mathbb{R}^n$, die von einer Basis $(b_1, \dots, b_n)$ von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird. Dann ist $G = \langle b_1, \dots, b_n \rangle = \sum_{j=1}^n \mathbb{Z} \cdot b_j$, und G ist als Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}^n$. Dann ist $b_1, \dots, b_n$ eine *Gitterbasis*.

Satz 15.18 (a) *Jedes Gitter $G \subset \mathbb{R}^2$ besitzt eine Gitterbasis (a, b) , die genau eine der folgenden 5 Bedingungen erfüllt. Direkt nach der Bedingung steht der Name eines solchen Gitters.*

(α) $|a| < |b| < |a - b| < |a + b|$: *schiefes Gitter.*

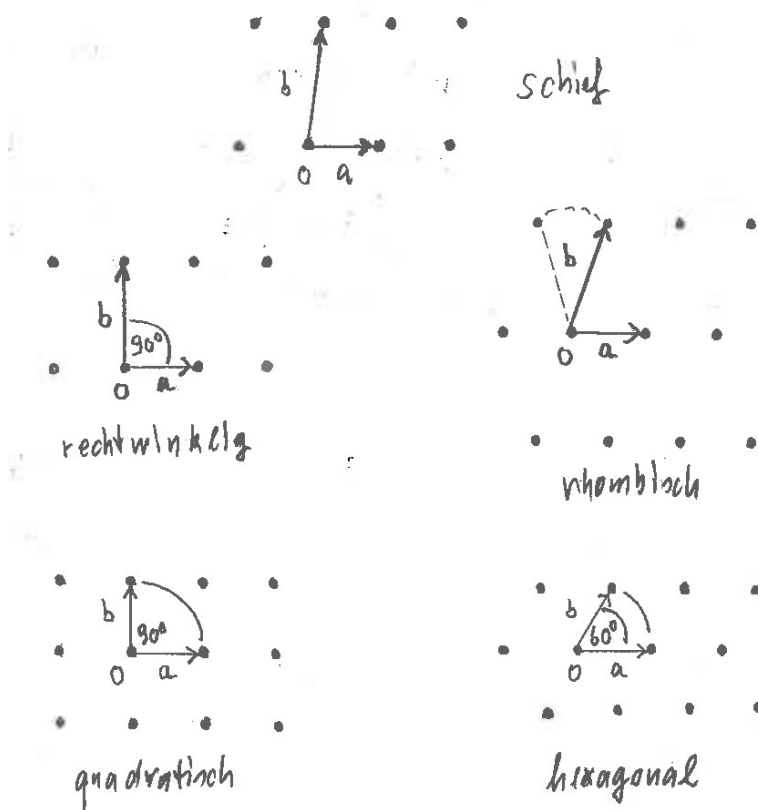
(β) $|a| < |b| < |a - b| = |a + b|$: *rechtwinkliges Gitter.*

(γ) $|a| = |b| < |a - b| = |a + b|$: *quadratisches Gitter.*

(δ) $|b| = |a - b| < |a + b|$ und $|a| \neq |b|$: *rhombisches Gitter oder Rauten-Gitter oder rechtwinklig flächenzentriertes Gitter.*

(ε) $|a| = |b| = |a - b|$: *hexagonales Gitter*

In den Fällen (δ) und (ε) gilt auch $|a| < |a + b|$.



(b) Die Untergruppe von $O(\mathbb{R}^2, \phi_{st})$, die ein Gitter wie in (a) auf sich abbildet, hat in den 5 Fällen folgende Elemente:

(α) $\{\pm \text{id}\}$.

(β) $\{\pm \text{id}\}$ und 2 Spiegelungen: als Gruppe isomorph zu D_4 .

(γ) Eine Gruppe vom Typ $D_8^{(2)}$ von Automorphismen eines Quadrats, 4 Drehungen und 4 Spiegelungen (Satz 14.8 (b)).

(δ) $\{\pm \text{id}\}$ und 2 Spiegelungen: als Gruppe isomorph zu D_4 .

(ε) Eine Gruppe vom Typ $D_{12}^{(2)}$ von Automorphismen eines regulären Sechsecks, 6 Drehungen und 6 Spiegelungen (Satz 14.8 (b)).

Zum Beweis: Der Beweis ist nicht schwer, aber auch nicht so interessant. Er wird hier nicht ausgeführt. $\square$

Im zweiten Schritt werden die Ornamentgruppen genauer beschrieben. Das geschieht in Definition 15.19 und Satz 15.20.

Definition 15.19 (a) Jeder der 17 Klassen von Ornamentgruppen wird folgendermaßen einer der 5 Gittertypen zugeordnet.

Das Gitter eine Ornamentgruppe $G \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^2, \phi_{st})$ ist die Gruppe $H \subset \mathbb{R}^2$ mit $G \cap \text{Transl}(\mathbb{R}^2) = \{T_a \mid a \in H\}$.

Dann haben innerhalb einer Klasse von Ornamentgruppen fast alle Ornamentgruppen Gitter desselben Typs. Das ist dann der *Gittertyp* der Klasse von Ornamentgruppen.

Bemerkung: Bei einer Klasse von Ornamentgruppen mit Gittertyp (α) oder (β) oder (δ) können spezielle Ornamentgruppen in dieser Klasse Gitter von anderen *spezielleren* Typen haben. Bei (α) sind alle anderen Gittertypen spezieller; bei (β) ist nur (γ) spezieller; bei (δ) ist nur (ε) spezieller.

(b) Dann sind a und b Erzeugende des Gitters mit denselben Eigenschaften wie in Satz 15.18. Es sei $\tilde{b} := b$ außer im Fall eines rhombischen Gitters. In dem Fall sei $\tilde{b} := 2b - a$.

(c) Die von der *International Union of Crystallography* 1952 gegebenen *Symbole* für die 17 Klassen von Ornamentgruppen bestehen aus 4 Zeichen $ABCD$ mit den folgenden Bedeutungen. Sei $G \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^2, \phi_{st})$ eine Ornamentgruppe.

$A = p$ bei allen Gittertypen außer dem rhombischen, $A = c$ beim rhombischen Gittertyp (p für *primitive*, c für *centered*).

$B \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ist die höchste auftretende Ordnung einer Drehung in G .

$C \in \{1, m, g\}$ ist 1, falls es keine Spiegelungen oder Gleitspiegelungen in G mit (Gleit)Spiegelungsachsen senkrecht zu $\tilde{a}$ oder $\tilde{b}$ gibt. C ist m , falls es Spiegelungen in G mit Spiegelungsachsen senkrecht zu $\tilde{a}$ oder $\tilde{b}$ gibt. Ansonsten (also falls es keine Spiegelungsachsen, aber Gleitspiegelungsachsen senkrecht zu $\tilde{a}$ oder $\tilde{b}$ gibt), ist $C = g$.

$D \in \{1, m, g\}$ ist 1, falls $B = 1$ ist. Ansonsten wird sowohl die Richtung r_1 ($= \tilde{a}$ oder $\tilde{b}$) betrachtet, die senkrecht zur in C betrachteten Richtung einer (Gleit)Spiegelung ist, als auch die gegenüber der Richtung r_1 um π/B gedrehte Richtung r_2 . Dann ist $D = 1$, falls es keine Spiegelungsachse oder Gleitspiegelungsachse in mindestens einer der Richtungen r_1 oder r_2 gibt. Es ist $D = m$ falls es Spiegelungsachsen in mindestens einer der Richtungen r_1 oder r_2 gibt. Ansonsten (also falls es keine Spiegelungsachsen, aber Gleitspiegelungsachsen in mindestens einer der Richtungen r_1 oder r_2 gibt), ist $D = g$.

Oft werden diese Bezeichnungen verkürzt: Offensichtliche Symbole werden weggelassen, siehe unten im Satz 15.20.

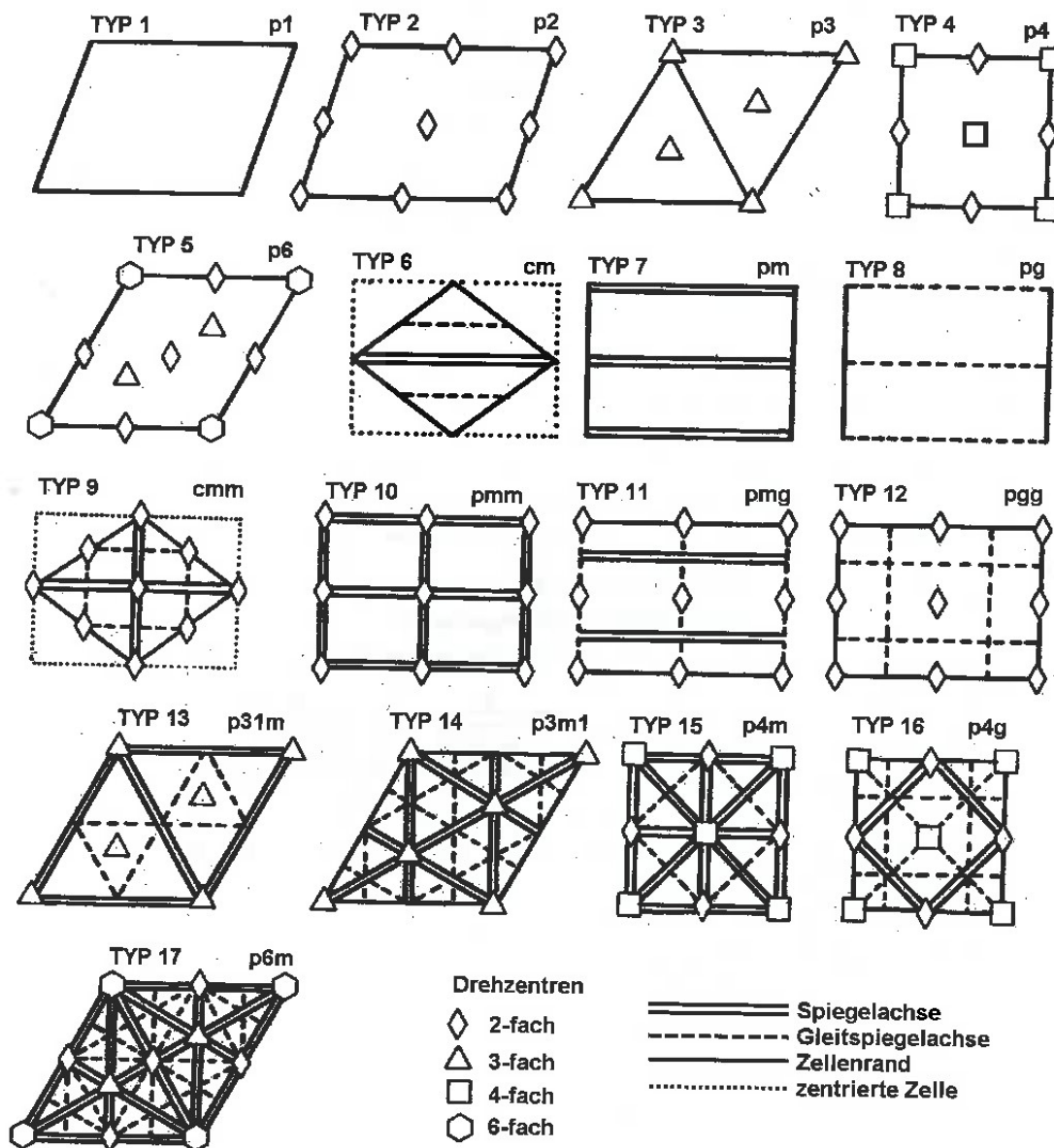
Satz 15.20 (a) Die folgende Tabelle gibt die Symbole und die Gittertypen der 17 Klassen von Ornamentgruppen. Der **Typ** ist nicht Standard, er ist an das Bild zu den 17 Klassen angepaßt, das in Teil (b) kommt.

<i>Typ</i>	<i>Symbol</i>	<i>Gittertyp</i>
1	$p1 = p111$	<i>schief</i>
2	$p2 = p211$	<i>schief</i>
7	$pm = p1m1$	<i>rechtwinklig</i>
8	$pg = p1g1$	<i>rechtwinklig</i>
10	$pmm = p2mm$	<i>rechtwinklig</i>
11	$pmg = p2mg$	<i>rechtwinklig</i>
12	$pgg = p2gg$	<i>rechtwinklig</i>
4	$p4 = p411$	<i>quadratisch</i>
15	$p4m = p4mm$	<i>quadratisch</i>
16	$p4g = p4mg$	<i>quadratisch</i>
6	$cm = c1m1$	<i>Raute</i>
9	$cmm = c2mm$	<i>Raute</i>
3	$p3 = p311$	<i>hexagonal</i>
14	$p3m1$	<i>hexagonal</i>
13	$p31m$	<i>hexagonal</i>
5	$p6 = p611$	<i>hexagonal</i>
17	$p6m = p6mm$	<i>hexagonal</i>

(b) Das folgende Bild ist dem Buch *ELEMENTARE GEOMETRIE UND ALGEBRA* von H.-W. Henn (Vieweg 2003) entnommen. Es beschreibt zu jeder der 17 Klassen von Ornamentgruppen eine Ornamentgruppe G in folgender Weise.

Es zeigt ein Parallelogramm, dessen Ecken im Fall $B \geq 2$ Drehpunkte von Drehungen maximaler Ordnung sind, und so, dass die Differenzvektoren die Basisvektoren a und b des Gitters aus Satz 15.17 sind.

Im Fall $B = 1$ (= keine Drehungen in G) liegen die Ecken des Parallelogramms auf Spiegelungsachsen oder Gleitspiegelungsachsen. Alle Drehpunkte (=Drehzentren) auf dem Parallelogramm sind angezeigt, wie in der Legende zum Bild beschrieben, ebenso die Teile im Parallelogramm von Spiegelungsachsen und Gleitspiegelungsachsen.



(c) Es gibt ein zu Satz 15.14 (e) analoges Diagramm, mit dem man zu einem gegebenen Ornament die Klasse seiner Ornamentgruppe bestimmen kann. Eine Version findet man im Buch von H.-W. Henn.

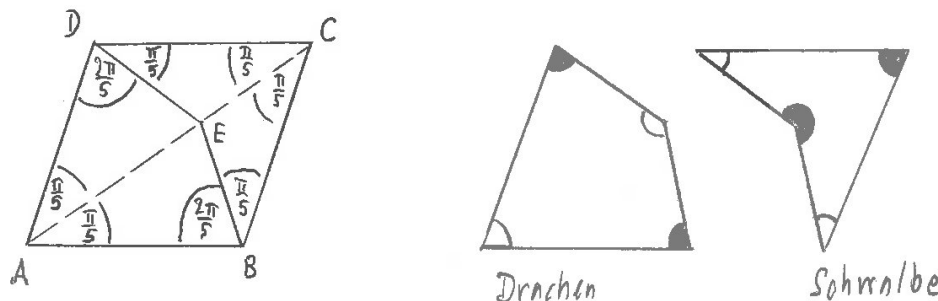
Zum Beweis: Der Beweis wird hier nicht gegeben. Man muß viele Fälle sorgfältig ausarbeiten. Die Klassifikation wurde zuerst 1891 von Fedorow gefunden. 1924 wurde sie von Pólya und Niggli wiederentdeckt. Der eleganteste moderne Beweis benutzt *Orbifolds*. □

Bilder von Ornamenten werden hier nicht gegeben. Man findet zahlreiche Bilder im Internet und in Büchern.

15.5 Penrose-Pflasterungen

Definition 15.21 (a) Eine *Penrose-Pflasterung* ist eine Überdeckung der Ebene $\mathbb{R}^2$ durch unendlich viele *Penrose-Fliesen*, wobei die Fliesen sich nur in ihrem Rand schneiden dürfen und nur Ecken gleicher Farbe (schwarz oder weiß, siehe unten) aneinanderstoßen dürfen.

(b) Es gibt zwei Typen von *Penrose-Fliesen*. Für ihre Konstruktion startet man mit einem Parallelogramm mit Ecken A, B, C, D (bei mathematisch positivem Umlauf) mit allen Seitenlängen gleich $g := \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \text{goldener Schnitt}$, und mit Winkeln $\angle(BAD) = \angle(DCB) = \frac{2\pi}{5}$ und $\angle(CBA) = \angle(ADC) = \frac{3\pi}{5}$, siehe die Skizze links. Der Punkt E wird auf der Strecke $\overline{AC}$ so gewählt, dass $\angle(EBA) = \angle(ADE) = \frac{2\pi}{5}$ und $\angle(CBE) = \angle(EDC) = \frac{\pi}{5}$ ist.



Die Penrose-Fliese *Drache* ist das (konvexe) Viereck $(ABED)$ mit den schwarzen Ecken B und D und den weißen Ecken A und E . Die Penrose-Fliese *Schwalbe* ist das (nicht konvexe) Viereck $(BCDE)$ mit den schwarzen Ecken E und C und den weißen Ecken B und D .

Lemma 15.22 (a) Im Parallelogramm $(ABCD)$ in Definition 15.21 (b) ist $d(B, E) = d(E, C) = 1$ und $d(A, E) = d(A, B) = g$.

(b) Es ist

$$\frac{\text{Fläche des Drachen}}{\text{Fläche der Schwalbe}} = g.$$

Beweis: (a) Das Dreieck $\triangle(BCE)$ ist gleichschenkelig. Daher ist $d(B, E) = d(E, C)$. Es ist

$$d(E, C) \cdot \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \cdot d(B, C) = \frac{1}{2} \cdot g.$$

Wegen $2 \cos \frac{\pi}{5} = g$ (Aufgabe 1 von Blatt 5 zur LA I im HWS 2014) ist $d(E, C) = 1$. Das Dreieck $\triangle(ABE)$ ist wegen

$$\angle(AEB) = \pi - \angle(BAE) - \angle(EBA) = \pi - \frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} = \angle(EBA)$$

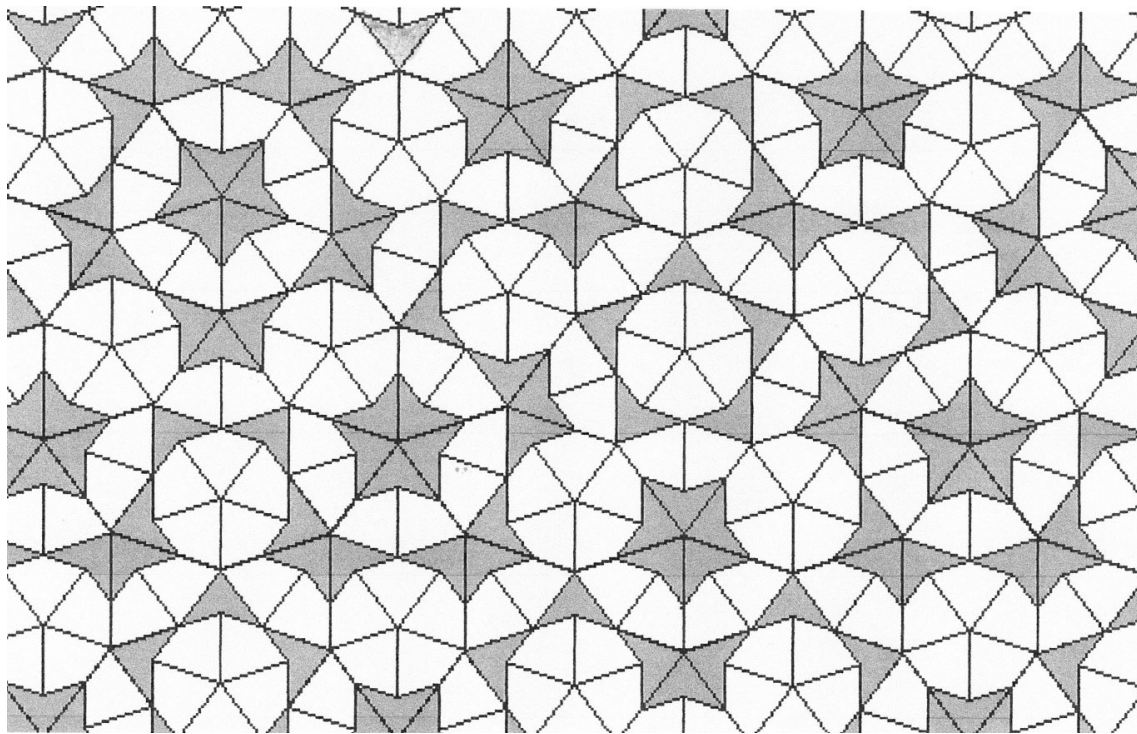
gleichschenkelig. Daher ist $d(A, E) = d(A, B)$, und das ist gleich g .

(b) Man bewegt das Dreieck $\Delta(BCE)$ so, dass seine Eckpunkte B und C auf den Eckpunkten A und B (in dieser Reihenfolge) des Dreiecks $\Delta(ABE)$ zum Liegen kommen. Wegen $\angle(CBE) = \frac{\pi}{5} = \angle(BAE)$ ist

$$\frac{\text{Fläche des Drachen}}{\text{Fläche der Schwalbe}} = \frac{d(A, E)}{d(B, E)} = \frac{g}{1} = g.$$

□

Beispiel 15.23 Hier ist ein Ausschnitt einer Penrose-Pflasterung. Hier sind die Drachen weiß und die Schwalben grau.



Satz 15.24 (Penrose 73)

(a) Es gibt Penrose-Pflasterungen, sogar überabzählbar viele (oben ist ein Ausschnitt eines Beispiels).

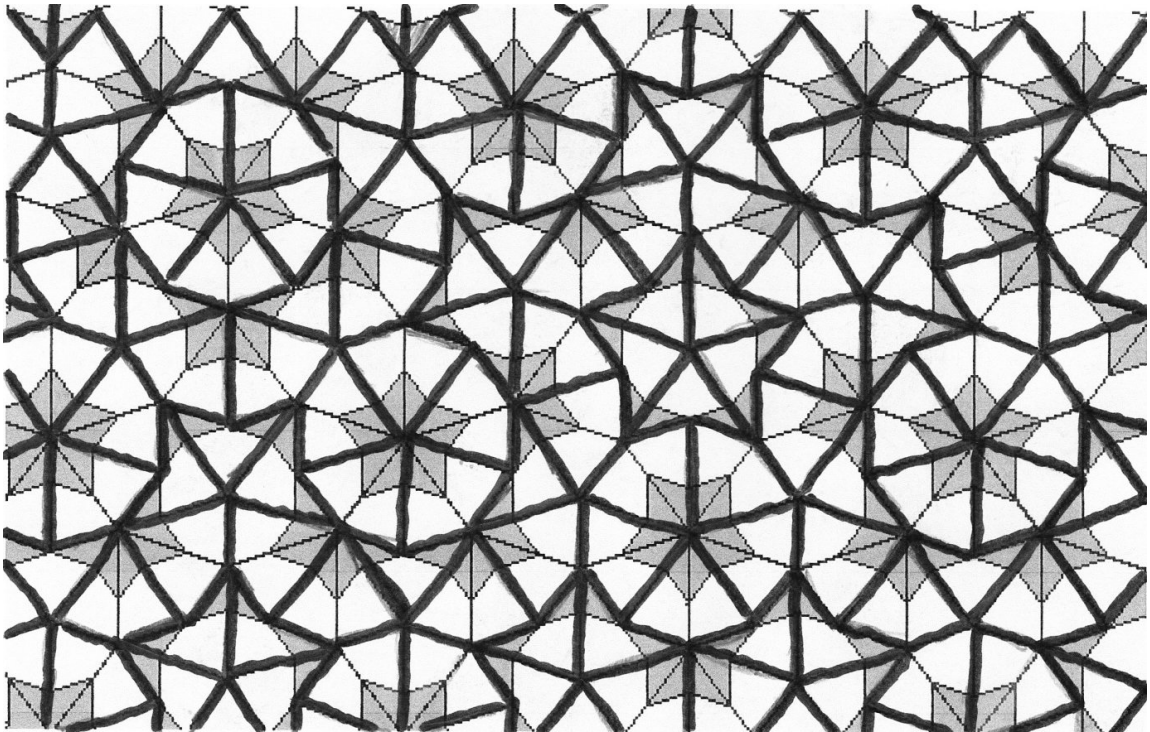
(b) Jeder endliche Teil einer Penrose-Pflasterung tritt bei jeder Penrose-Pflasterung unendlich oft auf. Insbesondere kann man zwei verschiedene Penrose-Pflasterungen nicht mit Hilfe von endlichen Teilen unterscheiden.

(c) Wenn man eine Folge von Kreisen K_n im $\mathbb{R}^2$ mit Radien r_n mit $r_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty$ betrachtet, gilt

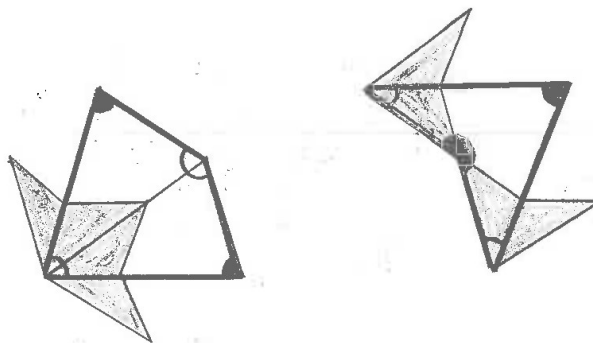
$$\frac{|\{\text{Drachen ganz in } K_n\}|}{|\{\text{Schwalben ganz in } K_n\}|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g.$$

(d) Es gibt keine Translation ($\neq T_0 = \text{id}$), die die Menge der Ecken und Kanten einer Penrose-Pflasterung auf sich abbildet, d.h. jede Penrose-Pflasterung ist nicht-periodisch.

(e) (Penrose+Conway) **Vergrößerung:** Man erhält auf folgende Weise aus einer Penrose-Pflasterung eine neue Penrose-Pflasterung mit neuen Fliesen, die um den Faktor g größer sind als die alten Fliesen: Jede Schwalbe wird durch einen Schnitt von einer zur anderen schwarzen Ecke in zwei Dreiecke geteilt. Die dabei entstandenen Kanten werden **neu** genannt. Alle Drachen und/oder Dreiecke, die eine nicht neue kurze Kante gemeinsam haben, werden entlang dieser Kante verklebt. Das folgende Bild gibt die Vergrößerung des Beispiels 15.18.

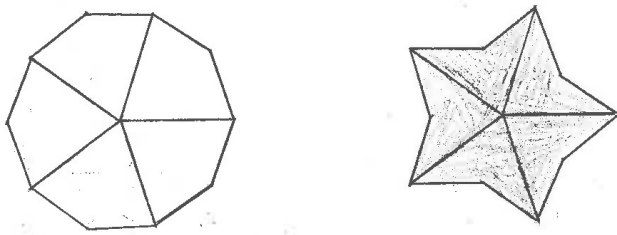


(f) (Penrose+Conway) **Verfeinerung:** Man erhält auf folgende Weise aus einer Penrose-Pflasterung eine neue Penrose-Pflasterung mit neuen Fliesen, die um den Faktor $\frac{1}{g}$ kleiner sind als die alten Fliesen: Jede Schwalbe wird wie im Bild in einen Drachen und zwei halbe Schwalben aufgeteilt. Jeder Drachen wird wie im Bild in zwei Drachen und zwei halbe Schwalben aufgeteilt. Die fehlenden halben Schwalben werden ergänzt.



(g) Vergrößerung und Verfeinerung sind inverse Prozeduren. Man kann die Verfeinerung auch bei Stücken von Penrose-Pflasterungen durchführen. Durch abwechselnde Verfeinerung und Reskalierung mit dem Faktor g erhält man immer größere Ausschnitte von Penrose-Pflasterungen mit immer mehr Penrose-Fliesen.

(h) Es gibt (bis auf Verschiebung und Drehung) genau zwei Penrose-Pflasterungen, bei denen es eine Untergruppe von $\text{Isom}(\mathbb{R}^2, \phi_{st})$ der Ordnung 5 von Drehungen gibt, die die Penrose-Pflasterung auf sich abbilden. Durch Vergrößerung und auch durch Verfeinerung gehen sie in einander über. Die Drehpunkte sind die Mittelpunkte der beiden folgenden Figuren.



Durch abwechselnde Verfeinerung und Reskalierung springt man zwischen immer größeren Ausschnitten der beiden Penrose-Pflasterungen hin und her.

Beweisfragmente und Bemerkungen: (i) Der Schlüssel zu den meisten Aussagen sind die Prozeduren *Vergrößerung* und/oder *Verfeinerung*. Um zu verstehen, dass die funktionieren, braucht man folgende elementare Beobachtungen:

- In einer Penrose-Pflasterung liegen an den beiden kurzen Kanten einer Schwalbe Drachen an.
- Entweder liegen an beiden kurzen Kanten eines Drachen Schwalben an, oder an einer kurzen Kante liegt eine Schwalbe an, an der anderen ein Drachen.

(ii) Zur Vergrößerung: Man betrachtet die Drachen. Wenn ein Drachen mit einer kurzen Kante an einen Drachen stößt, wird er mit diesem *Partner* und mit den beiden halben Schwalben an den anderen beiden kurzen Kanten zu einem größeren Drachen zusammengeklebt. Wenn ein Drachen an beiden kurzen Kanten an eine halbe Schwalbe stößt, wird er mit den beiden halben Schwalben zu einer größeren Schwalbe verklebt. Weil alle halben Schwalben mit ihrer alten kurzen Kante an einen Drachen stoßen, werden bei diesem Verkleben alle halben Schwalben erfaßt.

Daher erhält man aus einer Penrose-Pflasterung eine neue Pflasterung der Ebene aus größeren Drachen und Schwalben. Um einzusehen, dass es eine Penrose-Pflasterung ist, muß man sehen, dass die Regel, dass nur Ecken gleicher Farbe aneinanderstoßen dürfen, weiterhin gilt. Das folgt sofort aus der folgenden Beobachtung: Bei beiden größeren neuen Fliesen haben die Farben der Ecken gegenüber den alten kleineren Fliesen gewechselt.

Daher liefert die Vergrößerung eine neue Penrose-Pflasterung. (Sie muß nicht bis auf Skalierung gleich der alten sein und ist es selten (nie?).)

(iii) (d) folgt leicht aus (e), d.h. daraus, dass die Vergrößerung funktioniert. Wenn eine Penrose-Pflasterung unter einer nichttrivialen Translation invariant wäre, so wäre auch jede Penrose-Pflasterung, die man durch n -maliges Vergrößern ($n \in \mathbb{N}$) erhält, invariant unter der Translation. Aber für genügend großes n sind die Fliesen so groß, dass die Verschiebung einer einzelnen Fliese die Fliese überlappen würde. Dann kann die Penrose-Pflasterung nicht invariant unter der Translation sein. Ein Widerspruch.

(iv) Zur Verfeinerung: Die Bilder in (f) zeigen, dass lokal die Verfeinerung existiert und invers zur Vergrößerung ist. Wieder wechseln die Farben der Ecken bei den neuen Fliesen gegenüber den alten Fliesen.

Aus den Möglichkeiten, wie die alten Fliesen entlang ihrer langen Kanten aneinander stoßen können, ergibt sich, dass all die konstruierten halben Schwalben sich zu ganzen Schwalben zusammenfügen.

Daher erhält man eine neue Penrose-Pflasterung. Und die Verfeinerung ist invers zur Vergrößerung.

(v) Die Verfeinerung funktioniert auch, wenn man mit einem endlichen Ausschnitt (z.B. einer einzelnen Fliese) startet. Wiederholte Verfeinerung gibt immer größere Ausschnitte von Penrose-Pflasterungen. Daraus folgt die Existenz von beliebig großen Ausschnitten von Penrose-Pflasterungen, aber noch nicht direkt die Existenz von Penrose-Pflasterungen.

(vi) Wenn man aber mit einer der beiden Figuren in (h) aus 5 Drachen oder Schwalben startet, ist es ziemlich klar, dass abwechselnde Verfeinerung und Reskalierung immer größere Ausschnitte von Penrose-Pflasterungen liefert, die alle zyklische Drehsymmetrien der Ordnung 5 haben. Tatsächlich springt man zwischen immer größeren Ausschnitten von zwei Penrose-Pflasterungen hin und her, und diese sind die einzigen mit zyklischer Drehsymmetrie der Ordnung 5.

(vii) Zu (a): Dass es überabzählbar viele Penrose-Pflasterungen gibt, ist nicht so leicht zu sehen. Folgende Zuordnung ist ein erster Schritt: Man startet mit einer Penrose-Pflasterung P_0 . Man konstruiert durch Wiederholung der Vergrößerung (ohne Reskalierung) Penrose-Pflasterungen P_n , $n \in \mathbb{N}_0$, mit immer größeren Fliesen. Nun wählt man einen Punkt q im Inneren einer Fliese von P_0 . Man definiert eine Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $k_n \in \{0; 1\}$ von Nullen und Einsen wie folgt:

$$k_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } q \in (\text{ein Drache von } P_n), \\ 1 & \text{falls } q \in (\text{eine Schwalbe von } P_n). \end{cases}$$

Zwei Folgen heißen äquivalent, falls sie ab irgendeinem Folgenglied übereinstimmen. Weil die Fliesen der Penrose-Pflasterungen wie g^n wachsen, liegen zwei beliebige Punkte für genügend großes n in derselben Fliese. Ab da stimmen die beiden Folgen überein. Also erhält man zu einer Penrose-Pflasterung eine Äquivalenzklasse von Folgen.

Man kann zeigen (aber das ist nicht so leicht), dass überabzählbar viele Äquivalenzklassen von Folgen als Äquivalenzklassen von Penrose-Pflasterungen auftreten. Daher gibt es überabzählbar viele Penrose-Pflasterungen.

(viii) Zu (b): Das folgt leicht aus der Vergrößerung und der Verfeinerung. Sei irgendein Ausschnitt A (aus endlich vielen Fliesen) einer Penrose-Pflasterung P_0 gegeben. Für ein genügend großes $n \in \mathbb{N}$ ist der Ausschnitt in einer einzigen Fliese der Penrose-Pflasterung P_n enthalten.

Sei nun Q_0 irgendeine Penrose-Pflasterung und Q_n die n -fache Vergrößerung von Q_0 . Weil die Verfeinerung invers zur Vergrößerung ist, kann man Q_0 durch n -faches Verfeinern aus Q_n konstruieren. Daher ist der Ausschnitt A (bis auf Verschiebung und Drehung) auch in jeder Fliese gleichen Typs in Q_n enthalten. Daher ist der Ausschnitt A abzählbar oft in Q_0 enthalten. Das gibt (b).

(ix) Zu (c): Hier muß man ansehen, wie sich lokal das Verhältnis von Drachen zu Schwalben bei Verfeinerung (oder Vergrößerung) ändert. Das führt auf einfache Formeln. Daraus globale Aussagen zu machen, erfordert aber noch einige Genauigkeit.