Klausur am 01.09.2015
zur Linearen Algebra IIa

Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 90 Minuten. Insgesamt kann man 48 Punkte erreichen. Die Klausur umfaßt 8 Aufgaben zu je 6 Punkten. Die Aufgaben sind aber verschieden schwer.
Geben Sie da, wo es etwas zu rechnen oder zu beweisen gibt, hinreichend viele Zwischenschritte an, so dass ich sehen kann, wie Sie die Aufgaben gelöst haben.
Es sind keine Hilfsmittel erlaubt: Es dürfen weder eigene Aufzeichnungen noch Bücher und auch keine Taschenrechner verwendet werden.

Bitte geben Sie dieses Blatt mit ab. Bitte schreiben Sie auf jedes weitere Blatt, das Sie abgeben, ihren Vor- und Nachnamen und Ihre Matrikelnummer.
Für abgegebene Blätter ohne diese Angaben kann ich keine Punkte vergeben!

Vor- und Nachname:
Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$	Note

Bitte wenden Sie dieses Aufgabenblatt erst auf Aufforderung.

Viel Erfolg!

1. *(6=3+1+1+1 Punkte)*

   (a) Eine *(zweistellige) Relation* auf einer Menge $M \neq \emptyset$ ist eine Teilmenge R von $M \times M$. Welche Eigenschaften muß eine Relation erfüllen, um eine *Äquivalenzrelation* zu sein? Geben Sie die Namen der Eigenschaften *und* die Eigenschaften selbst an.

   (b) Sei G eine Gruppe und $U \subset G$ eine Untergruppe. Wann ist U ein *Normalteiler von G*?

   (c) Sei R eine kommutativer Ring mit 1. Wann ist eine Teilmenge $I \subset R$ ein *Ideal*?

   (d) Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Wann ist ein Ideal $I \subset R$ ein *maximales Ideal*?

2. *(6=5+1 Punkte)*

   (a) Führen Sie mit den Zahlen $r_0 = 150$ und $r_1 = 55$ den erweiterten Euklidischen Algorithmus durch, und geben Sie in einer Tabelle die Zahlen r_i, q_i, x_i, y_i mit

$$\begin{aligned} r_{i-2} &= q_{i-1}r_{i-1} + r_i, \\ x_0 = 1,\ x_1 = 0,\ x_i &= x_{i-2} - q_{i-1}x_{i-1} \text{ für } i \geq 2, \\ y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_i &= y_{i-2} - q_{i-1}y_{i-1} \text{ für } i \geq 2, \\ \text{(und deshalb auch } r_i &= x_i r_0 + y_i r_1) \end{aligned}$$

   bis $i = n$ mit $r_{n+1} = 0$ (und $r_n = \text{ggT}(r_0, r_1)$) an. Geben Sie auch n an.

   (b) Wie lautet die Ungleichung, die beim Euklidischen Algorithmus für $\mathbb{Z}$ im Fall $r_0 \in \mathbb{Z}$ und $r_1 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Anzahl n der Iterationsschritte mit der Anzahl der Dezimalstellen von r_1 verbindet?

3. *(6=3+3 Punkte)*

   (a) Sei $m \in \mathbb{N}$. Das m-te Kreisteilungspolynom $\Phi_m(x)$ ist definiert durch

$$\Phi_m = \Phi_m(x) := \prod_{a \in \mathbb{Z}_m^*} (x - e^{2\pi i a/m}) \in \mathbb{C}[x].$$

   Φ_m ist offenbar unitär und erfüllt $\deg \Phi_m = \varphi(m)$. Tatsächlich ist $\Phi_m \in \mathbb{Z}[x]$, und es ist in $\mathbb{Z}[x]$ und in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel. Und die Kreisteilungspolynome lassen sich rekursiv mit folgender Formel berechnen:

$$x^m - 1 = \prod_{d \in \mathbb{N}:\ d|m} \Phi_d.$$

   Berechnen Sie so die Kreisteilungspolynome Φ_3, Φ_9 und Φ_{27}.

   (b) Bestimmen Sie eine Lösung b des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} b &\equiv 4 \bmod 5 \\ b &\equiv 3 \bmod 7 \\ b &\equiv 9 \bmod 17 \end{aligned}$$

   Skizzieren Sie auch Ihren Lösungsweg.

4. *(6=3+3 Punkte)*

   (a) Formulieren Sie den Satz von Lagrange.

   (b) Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Lagrange folgende Aussage.

   Sei p eine Primzahl und $a \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid a$ (p teilt a nicht). Dann gilt $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

5. *(6 Punkte)* Das unitäre Polynom $t^2 + 1$ ist im Ring $\mathbb{F}_3[t]$ irreduzibel. Daher ist $\mathbb{F}_9 \cong \mathbb{F}_3[t]/(t^2 + 1)$. Schreiben Sie $\alpha := [t]$. Dann ist $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3 \cdot 1 + \mathbb{F}_3 \cdot \alpha$ ein $\mathbb{F}_3$-Vektorraum mit Basis $1, \alpha$, und es gilt $\alpha^2 = 2$. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{F}_9^*$ ist zyklisch und hat 8 Elemente, also hat sie $\varphi(8) = 4$ erzeugende Elemente.

   Geben Sie diese 4 erzeugenden Elemente an. Wählen Sie eines dieser Elemente – es wird hier b genannt – und berechnen Sie alle Potenzen b^k für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

6. *(6=2+1+2+1 Punkte)*

   (a) Für den Satz von Cayley und Hamilton und für die Definition des Minimalpolynoms braucht man zu einem gegebenen Endomorphismus $f : V \to V$ eines n-dimensionalen Vektorraums V ($n \in \mathbb{N}$) eine Abbildung $\Phi_f : K[t] \to \mathrm{End}(V)$. Definieren Sie Φ_f und sagen Sie, welche Strukturen Φ_f erhält.

   (b) Formulieren Sie den Satz von Cayley und Hamilton.

   (c) Definieren Sie das Minimalpolynom $M_f(t) \in K[t]$ eines Endomorphismus $f : V \to V$ eines n-dimensionalen Vektorraums V.

   (d) Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismen eines K-Vektorraums V mit $\dim_K V = 21$, der sich in Jordannormalform bringen läßt. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in K$ mit $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$. f habe 9 Jordanblöcke der Größen r_i und mit Eigenwerten λ_i wie in der Tabelle.

λ_i	α	α	α	β	β	β	γ	γ	γ
r_i	5	3	1	1	2	2	2	3	2

   Geben Sie $P_f(t)$ und $M_f(t)$ an. Begründungen sind nicht nötig.

7. *(6 Punkte)* Beweisen Sie Satz 11.20 (a) der Vorlesung:

   Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und sei $I \subsetneq R$ ein Ideal. Der Quotientenring R/I ist genau dann ein Körper, wenn I ein maximales Ideal ist..

   Sie dürfen benutzen, dass ein Ideal genau dann maximal ist, wenn für jedes $a \in R - I$ gilt: $(a) + I = R$ (Lemma 11.19 (c)). (Das ist aber *nicht* die Definition eines maximalen Ideals.)

8. *(6 Punkte)* (Spektralsatz für hermitesche Matrizen) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von A als komplexer Matrix reell sind und dass die Matrix diagonalisierbar ist.

   Bemerkung: Es gilt auch, dass die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten bezüglich des (hermiteschen) Standardskalarproduktes auf $M(n \times 1, \mathbb{C})$ orthogonal sind, aber das müssen Sie nicht zeigen.