Lösungen der Klausur
am 28.03.2015 zur Linearen Algebra IIa

1. *(6=1+1+2+1+1 Punkte)*

   (a) $a \in R - \{0\}$ ist ein Nullteiler, falls ein $b \in R - \{0\}$ mit $a \cdot b = 0$ existiert.

   (b) $R = \mathbb{Z}_6, a = 2, b = 3$ (oder $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, a = [2], b = [3]$).

   (c) Ein Element $a \in R - (R^* \cup \{0\})$ ist irreduzibel, falls gilt:

   $$a = b \cdot c \Rightarrow b \in R^* \text{ oder } c \in R^*.$$

   Ein Element $a \in R - (R^* \cup \{0\})$ ist ein Primelement, falls gilt:

   $$a|(b \cdot c) \Rightarrow a|b \text{ oder } a|c.$$

   (d) $K[x]$ (mit K ein Körper).

   (e) $\mathbb{Z}[x]$ und $K[x_1, x_2]$ (mit K ein Körper).

2. *(6=2+2+2 Punkte)*

   (a)

   $$\begin{aligned} \varphi(p^k) &= (p-1)p^{k-1} && \text{für } k \in \mathbb{N}, p \text{ eine Primzahl,} \\ \varphi(a \cdot b) &= \varphi(a) \cdot \varphi(b) && \text{für } a, b \in \mathbb{N} \text{ mit } \mathrm{ggT}(a,b) = 1. \end{aligned}$$

   (b)

n	21	22	23	24
$\varphi(n)$	12	10	22	8

   (c)

n	1	2	4	7	8	11	13	14
n^{-1}	1	8	4	13	2	11	7	14

3. *(6=4+2 Punkte)*

   (a)

   $$\begin{aligned} t^2 &= t \cdot t, \\ t^2 + 1 & \quad \text{irreduzibel,} \\ t^2 + 2 &= (t+1)(t+2), \\ t^2 + t &= t(t+1), \\ t^2 + 2t &= t(t+2), \\ t^2 + t + 1 &= (t+2)(t+2), \\ t^2 + t + 2 & \quad \text{irreduzibel,} \\ t^2 + 2t + 1 &= (t+1)(t+1), \\ t^2 + 2t + 2 & \quad \text{irreduzibel.} \end{aligned}$$

(b)

$$(\alpha+\alpha^2)\cdot\alpha^2 \;=\; \alpha^3+\alpha^4=(\alpha+1)+(\alpha^2+\alpha)=\alpha^2+1.$$

Das Inverse von $1+\alpha+\alpha^2$ ist α^2, denn

$$(1+\alpha+\alpha^2)\cdot\alpha^2 \;=\; \alpha^2+(\alpha+\alpha^2)\cdot\alpha^2=\alpha^2+(\alpha^2+1)=1.$$

4. *(6=2+2+1+1 Punkte)*

(a) Eine Matrix $A\in M(n\times n,K)$ ist in Jordannormalform, falls sie Blockdiagonalgestalt hat,

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_l \end{pmatrix}$$

mit $A_j\in M(r_j\times r_j,K)$, und falls die Blöcke A_j Jordanblöcke sind,

$$A_j=\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

für $\lambda_j\in K$.

(b) $f:V\to V$ läßt sich in Jordannormalform bringen, falls eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, so daß $M(\mathcal{B},f,\mathcal{B})$ in Jordannormalform ist. Dann heißt die Matrix $M(\mathcal{B},f,\mathcal{B})$ eine Jordannormalform von f.

(c) $f:V\to V$ läßt sich genau dann in Jordannormalform bringen, wenn das charakteristische Polynom $P_f(t)$ in $K[t]$ in Linearfaktoren zerfällt.

(d) $f:V\to V$ heißt nilpotent, falls $f^n=0$ ist.

5. *(6=4+2 Punkte)*

(a)

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{f} & 0 \\
 & & & & \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{f} & 0 \\
 & & & & & & \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{f} & 0 \\
 & & & & & & & & & & \bullet & \xrightarrow{f} & 0
\end{array}$$

4 Jordanblöcke der Größen $6,4,3$ und 1. $P_f(t)=t^{14},\ M_f(t)=t^6$.

(b) Die Matrix A ist die Begleitmatrix $A^{(f)}$ zum unitären Polynom $f(t)=t^4-3t^3+2t^2=t^2(t-1)(t-2)$. Daher haben A und B die Eigenwerte $0,\ 1$ und 2, und B hat zu jedem Eigenwert genau einen Jordanblock. Dessen Größe ist die Vielfachheit des Eigenwerts als Nullstelle von f. Also haben die Jordanblöcke zu den Eigenwerten $0,\ 1$ und 2 die Größen $2,\ 1$ und 1.

6. *(6=1,5+2,5+2 Punkte)*

(a) i.

$$\phi(\mathcal{A}^{tr},\mathcal{B})=(\phi(a_i,b_j))\in M(n\times m,K)\quad\text{bei } \mathcal{A}=(a_1,...,a_n),\mathcal{B}=(b_1,...,b_m).$$

ii.
$$\phi((\mathcal{A}')^{tr}, \mathcal{B}') = M(\mathcal{A}, \mathcal{A}')^{tr} \cdot \phi(\mathcal{A}^{tr}, \mathcal{B}) \cdot M(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

(b) i. $x \perp y \Longleftrightarrow_{\text{Def.}} \phi(x, y) = 0.$

ii. $U^{\perp} := \{x \in V \,|\, \text{für alle } y \in U \text{ gilt } x \perp y\}.$

iii. $\mathrm{Rad}(V) =: V^{\perp}.$

iv. ϕ ist entartet $\Longleftrightarrow_{\text{Def.}} \mathrm{Rad}(\phi) \supsetneqq \{0\}.$

v. $v \in V$ ist isotrop $\Longleftrightarrow_{\text{Def.}} v \neq 0$ und $v \perp v$.

(c) i. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

ii. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

7. *(6 Punkte)* $\Rightarrow$: Sei (f) ein maximales Ideal. Wäre $f(t)$ reduzibel, so gäbe es Polynome f_1 und f_2 mit $f = f_1 f_2$ und $1 \leq \deg f_1 < \deg f$ und $1 \leq \deg f_2 < \deg f$. Dann wäre $(f) \subsetneqq (f_1) \subsetneqq K[t]$, also (f) kein maximales Ideal, ein Widerspruch.

   $\Leftarrow$: Sei f irreduzibel. Zu zeigen ist, dass für jedes $g \in K[t] - (f)$ gilt: $(g) + (f) = K[t]$. Sei $g \in K[t] - (f)$. Weil f irreduzibel ist und weil g wegen $g \notin (f)$ kein Vielfaches von f ist, ist $\mathrm{ggT}(f, g) = 1$. Weil $K[t]$ ein Hauptidealring ist, ist dann 1 eine Linearkombination von f und g, also $1 \in (f, g) = (g) + (f)$. Daraus folgt $(g) + (f) = K[t]$. □

8. *(6 Punkte)* **Behauptung:** *Zu $d \in \mathbb{N}$ gibt es entweder gar kein Element $a \in K^*$ mit $o(a) = d$, oder die Anzahl der Elemente $a \in K^*$ mit $o(a) = d$ ist $\varphi(d)$.*

   Beweis der Behauptung: Sei $a \in K^*$ mit $o(a) = d \in \mathbb{N}$. Dann erzeugt a eine zyklische Untergruppe $\{1, a, a^2, ...a^{d-1}\}$ der Ordnung d von K^*. Die Elemente dieser Gruppe sind Nullstellen des Polynoms $x^d - 1$, denn $o(a^j)|d$,
$$x^d - 1 = \prod_{j=0}^{d-1}(x - a^j).$$
   Weil das Polynom $x^d - 1$ keine weiteren Nullstellen haben kann, sind die einzigen Elemente $b \in K^*$ mit $o(b) = d$ die Potenzen a^j mit $o(a^j) = d$. Das sind $\varphi(d)$ Stück, denn das sind genau die Erzeuger der zyklischen Gruppe $\{1, a, a^2, ...a^{d-1}\}$. (□)

   Anwendung der Behauptung: Sei nun $G \subset K^*$ eine endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe K^*. Nach dem Satz von Lagrange teilt für jedes Element $a \in G$ die Ordnung $o(a)$ die Ordnung $|G|$ von G.

   Für $d \in \mathbb{N}$ mit $d|\,|G|$ sei $\varepsilon(d) := 0$, falls G kein Element der Ordnung d enthält, und es sei $\varepsilon(d) := 1$, falls G mindestens ein Element der Ordnung d enthält. Im zweiten Fall enthält G alle Elemente der Ordnung d, und es sind $\varphi(d)$ viele, denn sie liegen alle in der zyklischen Untergruppe, die von einem von ihnen erzeugt wird.

   Es folgt
$$\sum_{d|\,|G|} \varepsilon(d) \cdot \varphi(d) = |G| \overset{\text{Hinweis}}{=} \sum_{d|\,|G|} \varphi(d).$$
   Daraus folgt $\varepsilon(d) = 1$ für alle d mit $d|\,|G|$, insbesondere $\varepsilon(|G|) = 1$. Daher ist G zyklisch. □