Klausur am 28.03.2015
zur Linearen Algebra IIa

Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 90 Minuten. Insgesamt kann man 48 Punkte erreichen. Die Klausur umfaßt 8 Aufgaben zu je 6 Punkten. Die Aufgaben sind aber verschieden schwer.
Geben Sie da, wo es etwas zu rechnen oder zu beweisen gibt, hinreichend viele Zwischenschritte an, so dass wir sehen können, wie Sie die Aufgaben gelöst haben.
Es sind keine Hilfsmittel erlaubt: Es dürfen weder eigene Aufzeichnungen noch Bücher und auch keine Taschenrechner verwendet werden.

Bitte geben Sie dieses Blatt mit ab. Bitte schreiben Sie auf jedes weitere Blatt, das Sie abgeben, ihren Vor- und Nachnamen und Ihre Matrikelnummer.
Für abgegebene Blätter ohne diese Angaben können wir keine Punkte vergeben!

Vor- und Nachname:
Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$	Note

Bitte wenden Sie dieses Aufgabenblatt erst auf Aufforderung.

Viel Erfolg!

1. *(6=1+1+2+1+1 Punkte)*

   (a) Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Wann ist ein Element $a \in R - \{0\}$ ein *Nullteiler*?

   (b) Geben Sie einen Nullteiler in einem kommutativen Ring mit 1 an.

   (c) Sei R ein Integritätsring (ein kommutativer Ring mit 1 ohne Nullteiler). Wann ist ein Element $a \in R - (R^* \cup \{0\})$ *irreduzibel*? Wann ist ein Element $a \in R - (R^* \cup \{0\})$ ein *Primelement*?

   (d) Geben Sie einen anderen Ring als $\mathbb{Z}$ an, der auch ein Euklidischer Ring ist.

   (e) Geben Sie zwei ZPE-Ringe an, die keine Hauptidealringe sind.

2. *(6=2+2+2 Punkte)*

   (a) Vervollständigen Sie die folgenden Formeln, indem Sie die Fragezeichen geeignet ersetzen. Hier ist $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Eulersche phi-Funktion.

   $$\begin{aligned} \varphi(p^k) &= ? && \text{für } k \in \mathbb{N}, p \text{ eine Primzahl.} \\ \varphi(a \cdot b) &= ? && \text{für } a, b \in \mathbb{N} \text{ mit } \mathrm{ggT}(a,b) = 1. \end{aligned}$$

   (b) Machen Sie eine Tabelle, die in der 1. Zeile die Zahlen $n \in \{21, 22, 23, 24\}$ und in der 2. Zeile die Zahlen $\varphi(n)$ enthält. $\varphi(n)$ soll unter n stehen.

   (c) Die Einheitengruppe des Ring $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15}, \cdot_{15})$ ist $\mathbb{Z}_{15}^*$ mit $|\mathbb{Z}_{15}^*| = \varphi(15) = 8$. Machen Sie eine Tabelle, die in der 1. Zeile alle Elemente von $\mathbb{Z}_{15}^*$ und in der 2. Zeile ihre Inversen enthält. Das Inverse zu einem Element soll unter dem Element stehen.

3. *(6=4+2 Punkte)*

   (a) Die unitären Polynome vom Grad 1 in $\mathbb{F}_3[t]$ sind die Polynome $t, t+1, t+2$. Sie sind alle irreduzibel. Machen Sie eine Liste aller neun unitären Polynome vom Grad 2 in $\mathbb{F}_3[t]$ und schreiben Sie die reduziblen unter ihnen als Produkte unitärer Polynome vom Grad 1.

   (b) Wenn man im Körper $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2[t]/(t^3 + t + 1)$ $\alpha := [t]$ schreibt, so ist $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2 \cdot 1 \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \alpha \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \alpha^2$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum mit Basis $1, \alpha, \alpha^2$, und es gilt $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$, also $\alpha^3 = \alpha + 1$. Das reicht, um in $\mathbb{F}_8$ zu rechnen.

   Berechnen Sie das Produkt $(\alpha + \alpha^2) \cdot \alpha^2$, d.h. rechnen Sie es in eine Linearkombination von $1, \alpha, \alpha^2$ um. Bestimmen Sie das Inverse von $1 + \alpha + \alpha^2$.

4. *(6=2+2+1+1 Punkte)*

   (a) Wann ist eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ in *Jordannormalform*?

   (b) Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V mit $\dim_K V = n \in \mathbb{N}$. Was meint man, wenn man sagt, daß *er sich in Jordannormalform bringen läßt*? Was ist eine *Jordannormalform von f*?

   (c) Welche relativ einfach zu überprüfende Bedingung ist hinreichend und notwendig dafür, daß ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines K-Vektorraums V mit $\dim_K V = n \in \mathbb{N}$ sich in Jordannormalform bringen läßt?

   (d) Wann heißt ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines K-Vektorraums V mit $\dim_K V = n \in \mathbb{N}$ *nilpotent*?

5. *(6=4+2 Punkte)*

   (a) Sei $f : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus eines K-Vektorraums V mit $\dim_K V = 14$ und mit folgenden Dimensionen der Kerne $\ker f^i$,

i	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\dim\ker f^i$	14	14	14	14	14	14	14	14	14	13	12	10	7	4	0

   Wieviele und wie große Jordanblöcke hat eine Jordannormalform von f? Geben Sie auch das charakteristische Polynom $P_f(t)$ und das Minimalpolynom $M_f(t)$ an.

   (b) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q})$ ist zu einer Matrix $B \in M(4 \times 4, \mathbb{Q})$ in Jordannormalform konjugiert. Geben Sie die Eigenwerte von A und B und die Größen der Jordanblöcke von B an. Begründen Sie Ihre Aussagen.

6. *(6=1,5+2,5+2 Punkte)*

   (a) Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K V = n \in \mathbb{N}$ und mit Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$. Sei W ein K-Vektorraum mit $\dim_K W = m \in \mathbb{N}$ und mit Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$. Sei $\phi : V \times W \to K$ eine Bilinearform.

      i. Wie ist $\phi(\mathcal{A}^{tr}, \mathcal{B})$ definiert? Welche Größe hat diese Matrix?

      ii. Geben Sie (ohne Begründung) die Formel an, die $\phi((\mathcal{A}')^{tr}, \mathcal{B}')$ mit $\phi(\mathcal{A}^{tr}, \mathcal{B})$ und geeigneten Basiswechselmatrizen ausdrückt.

   (b) Sei $\phi : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform.

      i. Wann heißen zwei Elemente $x, y \in V$ *orthogonal* (Notation: $x \perp y$)?

      ii. Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Wie ist der *orthogonale Untervektorraum* $U^\perp$ definiert?

      iii. Wie ist das *Radikal* $\mathrm{Rad}(\phi)$ definiert?

      iv. Wann heißt ϕ *entartet*?

      v. Wann heißt ein Element $v \in V$ *isotrop*?

   (c) Eine symmetrische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ definiert eine symmetrische Bilinearform Bil_A auf $M(n \times 1, \mathbb{R})$ durch $\mathrm{Bil}_A(x, y) := x^{tr} \cdot A \cdot y$.

      i. Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) - \{0\}$ an, so dass Bil_A entartet ist.

      ii. Geben Sie eine symmetrische Matrix $B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ an, so dass Bil_A nichtentartet, aber nicht positiv definit ist.

7. *(6 Punkte)* Beweisen Sie Satz 11.20 (b) der Vorlesung:

   Ein Ideal $(f(t)) \subset K[t]$ im Polynomring $K[t]$ über einem Körper K ist genau dann ein maximales Ideal, wenn $f(t)$ ein irreduzibles Polynom ist.

8. *(6 Punkte)* Beweisen Sie den

   Satz: *Sei K ein Körper (nicht notwendig endlich) und $G \subset K^*$ eine endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe K^*. Dann ist G zyklisch.*

   Hinweise: Was möchte man über die Ordnungen der Elemente von G beweisen? $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ wird von den Elementen von $\mathbb{Z}_m^*$ erzeugt. Es ist $m = \sum_{d|m} \varphi(d)$ (denn $t^m - 1 = \prod_{d|m} \Phi_d(t)$ und $\deg \Phi_d(t) = \varphi(d)$).