

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa

Einige **Definitionen**, die in den Aufgaben 3 und 4 gebraucht werden:

Sei $\phi : V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform auf einem K -Vektorraum V .

Zwei Vektoren v_1 und $v_2 \in V$ sind *orthogonal* (Notation: $v_1 \perp v_2$), falls $\phi(v_1, v_2) = 0$ ist (das ist wegen der Symmetrie von ϕ von der Reihenfolge von v_1 und v_2 unabhängig).

Ein Vektor $v \in V - \{0\}$ ist *isotrop*, falls er zu sich selbst orthogonal ist: $\phi(v, v) = 0$.

Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann ist das *orthogonale Komplement* $U^\perp \subset V$ von U der Untervektorraum

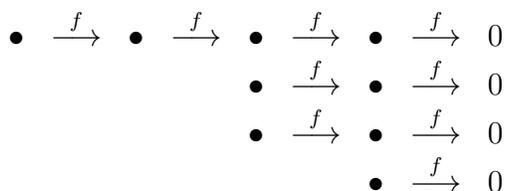
$$U^\perp := \{v \in V \mid \phi(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Das Radikal von ϕ ist der Untervektorraum $\text{Rad}(\phi) \subset V$ mit

$$\text{Rad}(\phi) := V^\perp = \{v \in V \mid \phi(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in V\}.$$

Die symmetrische Bilinearform heißt *nichtentartet*, falls $\text{Rad}(\phi) = \{0\}$ ist.

- (4 Punkte) Zuerst ein Beispiel: Im folgenden Bild steht jeder Punkt \bullet für ein Element einer Basis \mathcal{B} eines K -Vektorraums V , und $f : V \rightarrow V$ bildet die Elemente der Basis so aufeinander ab, wie es das Bild anzeigt. Offenbar gilt: $\dim V = 9$, f ist nilpotent, und bei geeigneter Reihenfolge der Elemente der Basis \mathcal{B} ist die Matrix $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$ in Jordannormalform mit 4 Blöcken der Größen 4, 2, 2 und 1.



Weiter sieht man

i	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\dim \ker f^i$	9	9	9	9	9	9	8	7	4	0

Nun sei $g : W \rightarrow W$ ein nilpotenter Endomorphismus eines K -Vektorraums W mit $\dim W = 12$ und mit folgenden Dimensionen der Kerne $\ker g^j$:

i	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\dim \ker g^j$	12	12	12	12	12	12	12	12	11	10	8	5	0

Wieviele und wie große Jordanblöcke hat eine Jordannormalform von g ? Machen Sie ein analoges Bild zu oben, das die Operation von g auf einer Basis von W zeigt, die eine Jordannormalform gibt. Geben Sie auch das charakteristische Polynom $P_g(t)$ und das Minimalpolynom $M_g(t)$ an.

2. (1+3 Punkte) Definition: Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ heißt *hermitesch*, falls $A = \overline{A}^{tr}$ ($= \overline{A^{tr}}$) ist. Hier ist $\overline{A} := (\overline{a_{ij}}$ bei $A = (a_{ij})$.

(a) Die Menge $\{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \mid A \text{ ist hermitesch}\}$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum (das müssen Sie nicht beweisen). Bestimmen Sie seine Dimension.

(b) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ hermitesch.

Zeigen Sie: Jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A ist reell.

Hinweis: Das verallgemeinert Satz 13.1 (a), denn reelle symmetrische Matrizen sind hermitesch. Der Beweis von Satz 13.1 (a) steht im Skript und in den Lösungen zur Klausur zur LA I am 19.12.2014.

Bemerkung: Auch die anderen Teile von Satz 13.1 verallgemeinern sich auf den Fall hermitescher Matrizen.

3. (4 Punkte)

(a) Auf dem \mathbb{R} -Vektorraum $\mathbb{R}[t]_{\leq 3} = \mathbb{R} \cdot 1 \oplus \mathbb{R} \cdot t \oplus \mathbb{R} \cdot t^2 \oplus \mathbb{R} \cdot t^3$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 ist die folgende Bilinearform $\phi_{int,2}$ definiert,

$$\phi_{int,2}(f, g) := \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

Bestimmen Sie die Matrix $(\phi(b_i, b_j))$ zur Basis $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (1, t, t^2, t^3)$.

Bemerkung: $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ ist ein Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\phi_{int,2}$.

(b) $U := \mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ sei der eindimensionale Unterraum von $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$, der vom Polynom 1 erzeugt wird. Bestimmen Sie sein orthogonales Komplement U^\perp bezüglich $\phi_{int,2}$.

4. (4 Punkte) Die vier symmetrischen Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

definieren symmetrische Bilinearformen ϕ_i auf $M(2 \times 1, \mathbb{R})$ durch

$$\phi_i(x, y) := x^{tr} \cdot A_i \cdot y.$$

Identifizieren Sie den $M(2 \times 1, \mathbb{R})$ mit der reellen Ebene \mathbb{R}^2 und machen Sie für $i = 1, 2, 3, 4$ je eine Skizze, die für alle Punkte x in einer Umgebung von 0 (zum Beispiel die Punkte in einer Kreisscheibe mit Zentrum 0) kenntlich macht, ob $\phi_i(x, x)$ größer, gleich oder kleiner Null ist. Bestimmen Sie außerdem jeweils alle isotropen Vektoren und das Radikal.

Abgabe bis Freitag, den 20. März 2015, um 11:50 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5