Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa

1. *(3 Punkte)* Bestimmen Sie eine Lösung b des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} b &\equiv 2 \bmod 7 \\ b &\equiv 1 \bmod 11 \\ b &\equiv 2 \bmod 13 \end{aligned}$$

   Skizzieren Sie auch Ihren Lösungsweg.

2. *(2 Punkte)* Beweisen Sie den folgenden Satz.

   Satz: Sei p eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a,p) = 1$. Dann gilt $a^{p-1} \equiv 1$ mod p.

   Hinweise: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist ein Ring, sogar ein Körper, Satz von Lagrange Teil (b).

3. *(1+1+1 Punkte)*

   (a) Eine Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ habe $\mathrm{Spur}(A) = 1$, Determinante $\det(A) = 8$ und drei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}$. Allein aus diesen Informationen kann man λ_1, λ_2 und λ_3 bestimmen. Wie? Was sind ihre Werte? Hinweis: Welche Gleichungen verbinden $\mathrm{Spur}(A)$ und $\det(A)$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$? Denken Sie an $P_A(t)$.

   (b) Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismen eines K-Vektorraums V mit $\dim_K V = 17$, der sich in Jordannormalform bringen läßt. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in K$ mit $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$. f habe 8 Jordanblöcke der Größen r_i und mit Eigenwerten λ_i wie in der Tabelle.

λ_i	α	α	α	β	β	γ	γ	γ
r_i	1	4	3	2	1	1	2	3

   Geben Sie $P_f(t)$ und $M_f(t)$ an. Begründungen sind nicht nötig.

   (c) Geben Sie zwei Matrizen $A, B \in M(4 \times 4, \mathbb{Q})$ in Jordannormalform an, deren Jordanblöcke nicht bis auf die Reihenfolge übereinstimmen, die aber trotzdem $P_A(t) = P_B(t)$ und $M_A(t) = M_B(t)$ erfüllen.

4. *(1+3 Punkte)*

   (a) Sei K ein Körper. $K[t]_{\leq 7}$ ist der 8-dimensionale K-Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 7. Es sei

$$f : K[t]_{\leq 7} \to K[t]_{\leq 7}, \quad g(t) \mapsto g'(t),$$

   die Ableitung. f ist ein nilpotenter Endomorphismus. Bestimmen Sie für die drei Fälle $\mathrm{char}(K) \in \{0, 2, 3\}$ jeweils die Bilder unter f der Vektoren t^k für alle $k \in \{0, \ldots, 7\}$.

(b) Bestimmen Sie in den drei Fällen $\operatorname{char}(K) \in \{0, 2, 3\}$ eine Jordannormalform von f. Geben Sie jeweils eine Basis $\mathcal{B}$ an, so daß $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$ in Jordannormalform ist.

Hinweise: Die Basis aus Monomen $1, t, t^2, ..., t^7$ ist in allen drei Fällen schon ziemlich nah dran. Aber die Jordanblöcke sind in den drei Fällen ganz verschieden.

5. *(1+3 Punkte)*

(a) Sei $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0 = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j) \in K[t]$ ein Polynom mit lauter verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, ..., \lambda_n$ in K. Die Begleitmatrix $A^{(f)}$ ist die Matrix

$$A^{(f)} = \begin{pmatrix} & & & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M(n \times n, K).$$

Sie hat das charakteristische Polynom $P_{A^{(f)}}(t) = f(t)$ (Aufgabe 3/Blatt 10 im HWS 14).

Zeigen Sie, dass $(1, \lambda_j, \lambda_j^2, ..., \lambda_j^{n-1})^t \in M(n \times 1, K)$ für $j = 1, ..., n$ ein Eigenvektor der transponierten Matrix $(A^{(f)})^t$ ist. Wegen der Vandermonde-Matrix sind diese Eigenvektoren eine Basis von $M(n \times n, K)$.

(b) Geben Sie im Fall von $f(t) = t^2 + a_1 t + a_0 = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$ (mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$) eine invertierbare Matrix $B \in GL(4, K)$ an, so dass $B^{-1} \cdot C \cdot B$ in Jordannormalform ist. Hier ist

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A^{(f)})^t & E_2 \\ 0 & (A^{(f)})^t \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, K).$$

Geben Sie auch die Jordannormalform $B^{-1} \cdot C \cdot B$ an.

Abgabe bis Freitag, den 13. März 2015, um 11:50 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5