Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa

1. *(4 Punkte)* Beweisen Sie Satz 11.26 der Vorlesung. Alle Resultate der Unterkapitel 11.1, 11.2 und 11.3 können benutzt werden.

   Satz 11.26: *Sei V ein K-Vektorraum und U ein Untervektorraum. Nach Satz 11.9 ist V/U eine additive abelsche Gruppe. Die Äquivalenzklasse von $v \in V$ wird als $[v] \in V/U$ geschrieben.*

   Die Abbildung $K \times V/U \to V/U$, $(\lambda, [v]) \mapsto [\lambda \cdot v]$, definiert eine skalare Multiplikation auf V/U und macht V/U zu einem K-Vektorraum.

   Die Projektion $\pi_U : V \to V/U, v \mapsto [v]$, ist eine surjektive lineare Abbildung. Ihr Kern ist $\ker(\pi_U) = U$. Im Fall von $\dim U < \infty$ ist $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

2. *(2+1 Punkte)* Der *Satz von Wilson* wurde zuerst von Ibn al Haytham gefunden und dann über 700 Jahre später von Wilson (1770) wiederentdeckt.

   Satz von Wilson:

   (i) *Sei p eine Primzahl. Dann ist $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.*

   (ii) *Es ist $(4-1)! \equiv 2 \mod 4$.*

   (iii) *Sei $m \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ keine Primzahl. Dann ist $(m-1)! \equiv 0 \mod m$.*

   (a) Beweisen Sie Teil (i) des Satzes von Wilson.
   Hinweise: Man muß in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ rechnen. Die einzigen Elemente a in einem Körper mit $a = a^{-1}$ sind 1 und -1, denn das sind die einzigen Nullstellen des Polynoms $x^2 - 1$.

   (b) Beweisen Sie Teil (iii) des Satzes von Wilson.

3. *(2 Punkte)* Beweisen Sie: Sei p eine Primzahl. Dann gibt es bis auf Isomorphie nur eine Gruppe der Ordnung p, die zyklische Gruppe.

   Hinweis: Welche Ordnungen haben die Elemente einer beliebigen Gruppe der Ordnung p?

   Notation: Diese Gruppe wird mit multiplikativer Verknüpfung C_p genannt (C für **C**yclic).

4. *(3 Punkte)* Untergruppen, Normalteiler und Quotientengruppen der A_4.

   Erinnerung an LA I im HWS 2014:

   $$A_4 = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}.$$

   Wegen des Satzes von Lagrange kann es höchstens Untergruppen der Ordnungen 1,2,3,4,6,12 geben. Ordnung 1: $\{\mathrm{id}\}$. Ordnung 12: A_4.

(a) Geben Sie eine Untergruppe K_4 der Ordnung 4 an. Es gilt (Sie müssen es nicht zeigen), dass sie die einzige Untergruppe der Ordnung 4 ist. Daher ist sie ein Normalteiler. Welche Gruppe ist die Quotientengruppe A_4/K_4 (bis auf Isomorphie)?

(b) Geben Sie drei Untergruppen der Ordnung 2 an. Zeigen Sie, dass sie alle konjugiert sind.

(c) Geben Sie vier Untergruppen der Ordnung 3 an. Zeigen Sie, dass sie alle konjugiert sind.

Bemerkung: Das sind alle Untergruppen der A_4. Insbesondere gibt es keine Untergruppe der Ordnung 6, und die einzigen Normalteiler sind $\{\mathrm{id}\}$, K_4 und A_4.

5. *(4 Punkte)* Sei (wie in der Vorlesung) für $n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl

$$J_{n,p} := \{f \in \mathbb{F}_p[t] \mid \deg f = n,\ f \text{ ist irreduzibel und unitär}\}.$$

($J_{n,p}$ ist immer nichtleer.) Von Beispiel 10.22 wissen Sie

$$J_{1,2} = \{t, t+1\}, \quad J_{3,2} = \{t^3+t+1, t^3+t^2+1\}.$$

In Bemerkung/Beispiel 11.21 (vii) steht die Formel (ohne Beweis)

$$t^{p^n} - t = \prod_{r|n} \prod_{g \in J_{r,p}} g(t) \in \mathbb{F}_p[t].$$

Im Spezialfall $(n,p) = (3,2)$ gibt das (und das läßt sich leicht nachrechnen)

$$t^7 - 1 = (t+1)(t^3+t+1)(t^3+t^2+1) \in \mathbb{F}_2[t].$$

Laut Aufgabe 5 von Blatt 3 ist

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{F}_8 & = & \mathbb{F}_2[t]/(t^3+t+1) = \mathbb{F}_2 \cdot 1 \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \alpha \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \alpha^2 \\ & = & \{0, 1, \alpha, 1+\alpha, \alpha^2, 1+\alpha^2, \alpha+\alpha^2, 1+\alpha+\alpha^2\} \\ \text{mit} & & \alpha := [t] \text{ und } \alpha^3+\alpha+1 = 0. \end{array}$$

Die multiplikative Gruppe $\mathbb{F}_8^*$ hat Ordnung 7, ist wegen Aufgabe 3 also zyklisch, und alle Elemente außer der 1 haben Ordnung 7. Also erfüllen alle Elemente $a \in \mathbb{F}_8^*$ die Gleichung $a^7 = 1$. Daher ist

$$t^7 - 1 = \prod_{a \in \mathbb{F}_8^*} (t-a).$$

α ist eine Nullstelle von t^3+t+1. Finden Sie die anderen beiden Nullstellen von t^3+t+1 und alle drei Nullstellen von t^3+t^2+1. Schreiben Sie die Elemente als Linearkombinationen von $1, \alpha$ und α^2 (wie oben), und dokumentieren Sie die entscheidenden Rechnungen.

Abgabe bis Freitag, den 6. März 2015, um 11:50 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5