Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa

1. *(4 Punkte)* In $\mathbb{F}_2[x]$ gibt es 16 Polynome vom Grad 4, alle Polynome der Gestalt $x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ mit $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{F}_2$. In $\mathbb{F}_2[x]$ ist 1 die einzige Zahl $\neq 0$. Daher sind da alle Polynome (außer der 0) unitär, und für jedes Polynom ist die Zerlegung in irreduzible Polynome eindeutig. Schreiben Sie für alle 16 Polynome vom Grad 4 die Zerlegung in irreduzible Polynome auf. Begründungen sind nicht nötig.

   Hinweise: Bei 3 der 16 Polynome hat man nur einen Faktor, die 3 sind also selber irreduzibel. Es ist hilfreich, Beispiel 10.22 anzusehen, denn da findet man die Zerlegungen der Polynome der Grade 1, 2 und 3 in irreduzible Polynome. Ein Weg zur Lösung der Aufgabe ist es, alle Produkte vom Grad 4 von irreduziblen Polynomen der Grade 1, 2 und 3 auszurechnen. Die Polynome vom Grad 4, die da nicht auftreten, müssen irreduzibel sein.

2. *(1+1 Punkte)*

   (a) Definieren Sie den Begriff *Äquivalenzrelation*. Den Begriff *(zweistellige) Relation* können Sie als bekannt voraussetzen.

   (b) Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M, und seien $[x] := \{z \in M \mid x \sim z\}$ und $[y]$ zwei Äquivalenzklassen. Führen Sie einen relativ formalen Beweis der (leichten) Aussage

   $$[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y].$$

3. *(2+1+1 Punkte)* Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zwei Elemente a und b heißen *konjugiert*, falls ein Element c mit $cac^{-1} = b$ existiert. (Konjugiert sein ist offenbar eine Äquivalenzrelation auf G.)

   Zwei Untergruppen U_1 und U_2 heißen konjugiert, falls ein Element $c \in G$ mit $cU_1c^{-1} = U_2$ existiert. (Konjugiert sein ist offenbar eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Untergruppen von M.)

   Die S_3 hat 3 Untergruppen mit 2 Elementen, die Gruppen

   $$Z_1 := \{\mathrm{id}, (12)\}, \quad Z_2 := \{\mathrm{id}, (13)\}, \quad Z_3 := \{\mathrm{id}, (23)\}$$

   (Beispiel 1.16 (iii)). Sie sind tatsächlich alle konjugiert.

   (a) Listen Sie die Linksnebenklassen und die Rechtsnebenklassen der Gruppe Z_1 in S_3 auf.

   (b) Sei $\{a_1, ..., a_k\} \subset \{1, ..., n\}$ mit $2 \leq k \leq n$ und $|\{a_1, ..., a_k\}| = k$. Dann ist $(a_1\ ...\ a_k) \in S_n$ eine zyklische Permutation. Geben Sie (ohne Begründung) ein Element $\varphi \in S_n$ an, das

   $$\varphi^{-1}(a_1\ ...\ a_k)\varphi = (1\ ...\ k)$$

   erfüllt.

(c) Geben Sie (ohne Begründung) ein Element $\psi \in S_3$ an, das $\psi^{-1} Z_3 \psi = Z_1$ erfüllt.

4. *(2 Punkte)* Aus dem surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$(\mathbb{R}, +) \to (S^1, \cdot), \quad r \mapsto e^{2\pi i r},$$

erhält man mit Satz 11.10 den Gruppenisomorphismus

$$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +) \to (S^1, \cdot), \quad [r] = (r \mod \mathbb{Z}) \mapsto e^{2\pi i r}.$$

Sei $\tau \in \mathbb{C}$ mit $\Im(\tau) > 0$. Dann ist $\mathbb{C} = \mathbb{R} \cdot 1 \oplus \mathbb{R} \cdot \tau$. Geben Sie einen Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{C}, +) \to (S^1 \times S^1, \cdot)$ an, der mit Satz 11.10 einen Gruppenisomorphismus

$$(\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot \tau), +) \to (S^1 \times S^1, \cdot)$$

induziert. Begründungen sind nicht nötig.

5. *(4 Punkte)* Wenn man im Körper

$$\mathbb{F}_8 = \frac{\mathbb{F}_2[t]}{(t^3 + t + 1)}$$

$\alpha := [t]$ schreibt, so ist $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2 \cdot 1 \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \alpha \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \alpha^2$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum mit Basis $1, \alpha, \alpha^2$, und es gilt $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$, also $\alpha^3 = \alpha + 1$. Das reicht, um in $\mathbb{F}_8$ zu rechnen. Zum Beispiel ist

$$(1 + \alpha^2) \cdot \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha \cdot \alpha^3 = \alpha^2 + \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha = \alpha.$$

Vervollständigen Sie die folgende Multiplikationstafel. Geben Sie zur Berechnung von $(1+\alpha^2) \cdot (1+\alpha)$ einige Zwischenschritte wie oben bei $(1+\alpha^2) \cdot \alpha^2$ an. Weitere Begründungen sind nicht nötig.

	0	1	α	$1+\alpha$	α^2	$1+\alpha^2$	$\alpha+\alpha^2$	$1+\alpha+\alpha^2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	α	$1+\alpha$	α^2	$1+\alpha^2$	$\alpha+\alpha^2$	$1+\alpha+\alpha^2$
α	0	α						
$1+\alpha$	0	$1+\alpha$						
α^2	0	α^2				α		
$1+\alpha^2$	0	$1+\alpha^2$			α			
$\alpha+\alpha^2$	0	$\alpha+\alpha^2$						
$1+\alpha+\alpha^2$	0	$1+\alpha+\alpha^2$						

Abgabe bis Freitag, den 27. Februar 2015, um 11:50 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5