

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa

1. (3 Punkte) Führen Sie mit den Zahlen $r_0 = 158$ und $r_1 = 90$ den erweiterten Euklidischen Algorithmus durch, und geben Sie in einer Tabelle die Zahlen r_i, q_i, x_i, y_i mit

$$\begin{aligned} r_{i-2} &= q_{i-1}r_{i-1} + r_i, \\ x_0 = 1, x_1 = 0, x_i &= x_{i-2} - q_{i-1}x_{i-1} \text{ für } i \geq 2, \\ y_0 = 0, y_1 = 1, y_i &= y_{i-2} - q_{i-1}y_{i-1} \text{ für } i \geq 2, \\ (\text{und deshalb auch } r_i &= x_i r_0 + y_i r_1) \end{aligned}$$

bis $i = n$ mit $r_{n+1} = 0$ (und $r_n = \text{ggT}(r_0, r_1)$) an. Geben Sie auch n an.

2. (2+3 Punkte)

- (a) Formulieren Sie die Teile (b), (c) und (d) von Satz 10.2.
(b) Beweisen Sie Teil (d) von Satz 10.2.

3. (4 Punkte) Der erweiterte Euklidische Algorithmus funktioniert auch bei Polynomringen $K[x]$ statt des Rings \mathbb{Z} . Hier wird $\deg r_i < \deg r_{i-1}$ gefordert.

Führen Sie den erweiterten Euklidischen Algorithmus mit den Polynomen $r_0 = x^4 + x^3 + x + 1$ und $r_1 = x^3 + x^2 - x \in \mathbb{Q}[x]$ durch. Geben Sie das Ergebnis in einer Tabelle wie in den Beispielen 10.3 (a) und (b) der Vorlesung an. Nur x_{n+1} und y_{n+1} brauchen Sie nicht zu berechnen.

4. (4 Punkte) Beweisen Sie den folgenden Satz (Binet (1841), Lamé (1844)):

Es seien $r_0, r_1 \in \mathbb{N}$ mit $r_0 > r_1$ und $r_1 < F_{k+1}$ ($= k + 1$ -te Fibonacci-Zahl) für ein $k \geq 2$. Dann erfüllt die Anzahl n der Schritte im Euklidischen Algorithmus (mit $r_{n+1} = 0$ und $r_n = \text{ggT}(r_0, r_1)$)

$$n \leq k - 1.$$

Hinweise: Induktiv vorgehen. $r_2 \& F_k$ und $r_3 \& F_{k-1}$ berücksichtigen.