Lösungen der Klausur am 06.02.2015 zur Linearen Algebra I

1. *(6=2+3+1 Punkte)*

   (a) Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt Untervektorraum von V, falls $U \neq \emptyset$ ist und falls U abgeschlossen unter der Addition und der skalaren Multiplikation ist, d.h. falls gilt:

   $$\begin{aligned} v \in U,\ w \in U \quad &\Rightarrow \quad v + w \in U, \\ \lambda \in K,\ v \in U \quad &\Rightarrow \quad \lambda \cdot v \in U. \end{aligned}$$

   (b) (i) Die Familie $(v_i)_{i \in I}$ ist ein Erzeugendensystem von V, falls $V = \operatorname{span}_K(v_i)_{i \in I}$ ist.

   (ii) Die Familie ist linear unabhängig, falls für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ gilt:

   $$\sum_{j \in J} \lambda_j v_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0 \text{ für alle } j \in J.$$

   (iii) Die Familie ist eine Basis von V, falls sie ein Erzeugendensystem von V und linear unabhängig ist.

   (c) Für $x, y \in V$ gilt $|\phi(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

2. *(6=2+2+2 Punkte)*

   (a)

   $$\begin{aligned} (A \cdot B)^{-1} &= B^{-1} \cdot A^{-1}, \quad (A \cdot B)^{tr} = B^{tr} \cdot A^{tr}, \\ Z_{II}^{mat}(-\lambda; i, j) \cdot Z_{II}^{mat}(\lambda; i, j) &= E_n, \quad Z_I^{mat}(\lambda^{-1}; i) \cdot Z_I^{mat}(\lambda; i) = E_n. \end{aligned}$$

   (b)

   $$\begin{aligned} M(\mathcal{B}, \mathcal{A})^{-1} &= M(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \\ M(\widetilde{\mathcal{B}}, f, \widetilde{\mathcal{A}}) &= M(\widetilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}) \cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{A}}). \end{aligned}$$

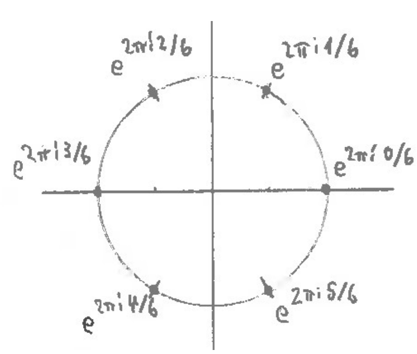
   (c) Die Komplementärmatrix $A^\sharp$ von A hat die Einträge

   $$A^\sharp_{ij} = (-1)^{i+j} \det A[j, i].$$

   Hier ist $A[j, i]$ die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die man aus A erhält, indem man die j-te Zeile und die i-te Spalte streicht.

3. *(6=2+4 Punkte)*

   (a) .



k	0	1	2	3	4	5
$\Re(e^{2\pi i k/6})$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\Im(e^{2\pi i k/6})$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b)

$$\begin{aligned}
C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
Z_{II}(1;2,3) &: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
Z_{II}(1;2,3) &: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also ist der Zeilenrang von C gleich 2.

4. *(6=2+4 Punkte)*

(a)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	4	3	9	2	8	7	5	10

(b)

$$\begin{aligned}
\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 6 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} = (2\ 4\ 5)(3\ 8\ 9\ 7), \\
\varphi &= (1\ 3\ 2\ 4)(2\ 6\ 5)(3\ 4\ 5) = (1\ 3)(2\ 6\ 5), \\
\operatorname{sign}(\sigma) &= 1 \cdot (-1) = -1, \\
\operatorname{sign}(\varphi) &= (-1) \cdot 1 = -1.
\end{aligned}$$

5. *(6 Punkte)*

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-3 & 0 & 0 \\ 0 & t-3 & -1 \\ 0 & -1 & t-3 \end{pmatrix} = (t-3)((t-3)^2-1) = (t-3)(t^2-6t+8) = (t-3)(t-2)(t-4).$$

Die Eigenwerte von A sind 3, 2 und 4. Ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist eine Lösung des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda \cdot E_3) \cdot x = 0$. Im folgenden bezeichnet " $\sim$ " Zeilenumformungen.

Zum Eigenwert 3:

$$A - 3 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ein Eigenvektor ist } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zum Eigenwert 2:

$$A - 2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ein Eigenvektor ist } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zum Eigenwert 4:

$$A - 4 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ein Eigenvektor ist } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. *(6 Punkte)*

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1 = (1,1,1), \quad \|b_1\|^2 = 3, \\
b_2 &= a_2 - \frac{\phi(a_2,b_1)}{\|b_1\|^2} b_1 = (1,1,0) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(1,1,-2), \quad \|b_2\|^2 = \frac{2}{3}, \\
b_3 &= a_3 - \frac{\phi(a_3,b_1)}{\|b_1\|^2} b_1 - \frac{\phi(a_3,b_2)}{\|b_2\|^2} b_2 = (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1/3}{2/3} \cdot \frac{1}{3}(1,1,-2) \\
&= (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{6}(1,1,-2) = \frac{1}{2}(1,-1,0), \quad \|b_3\|^2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \quad c_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2), \quad c_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0).$$

7. *(6=2+4 Punkte)*

   (a) Es ist $A^k = (\delta_{i+k,j}) \in M(n \times n, \mathbb{C})$ die Matrix mit Einsen auf derjenigen Nebendiagonalen, die um k Positionen oberhalb der Diagonalen liegt, und mit Nullen sonst. Insbesondere ist $A^n = 0$ die Nullmatrix. Es ist $\ker l_{A^k} = \operatorname{span}(e_1, ..., e_k)$, wobei e_j der j-te Einheitsvektor in $M(n \times 1, K)$ ist, also $e_j = (\delta_{ij})_{i=1,...,n} \in M(n \times 1, \mathbb{C})$.

   (b)

$$\begin{aligned}
& \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } B \\
\iff\ & \operatorname{Eig}(B,\lambda) \neq \{0\} \\
\iff\ & \text{Lös}(B - \lambda \cdot E_n, 0) \neq \{0\} \\
\iff\ & B - \lambda \cdot E_n \text{ ist nicht invertierbar} \\
\iff\ & 0 = \det(\lambda \cdot E_n - B) = P_B(\lambda).
\end{aligned}$$

8. *(6 Punkte)* Zuerst wird für $m \geq l$ die Anzahl

$$|\{(b_1, ..., b_l) \in (\mathbb{F}_p^m)^l \,|\, (b_1, ..., b_l) \text{ ist linear unabhängig in } \mathbb{F}_p^m\}|$$

bestimmt: b_1 kann beliebig in $\mathbb{F}_p^m - \{0\}$ gewählt werden. Dafür gibt es $|\mathbb{F}_p^m - \{0\}| = p^m - 1$ Möglichkeiten. Danach kann b_2 beliebig in $\mathbb{F}_p^m - \operatorname{span}(b_1)$ gewählt werden. Dafür gibt es $p^m - p$ Möglichkeiten. So macht man weiter. Am Ende kann b_l beliebig in $\mathbb{F}_p^m - \operatorname{span}(b_1, ..., b_{l-1})$ gewählt werden. Dafür gibt es $|\mathbb{F}_p^m - \operatorname{span}(b_1, ..., b_{l-1})| = p^m - p^{l-1}$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es

$$(p^m - 1)(p^m - p)...(p^m - p^{l-1})$$

Möglichkeiten. Die Menge oben hat also so viele Elemente.

Im Fall $m = n$ erhält man so alle möglichen Basen von allen möglichen Untervektorräumen $V \subset \mathbb{F}_p^n$ mit $\dim V = l$. Ihre Anzahl ist also $(p^n-1)(p^n-p)...(p^n-p^{l-1})$.

Im Fall $m = l$ erhält man alle Basen eines $\mathbb{F}_p$-Vektorraums der Dimension l. Ihre Anzahl ist also $(p^l - 1)(p^l - p)...(p^l - p^{l-1})$.

Wenn man alle Basen aller möglichen Untervektorräume $V \subset \mathbb{F}_p^n$ mit $\dim V = l$ durchläuft, hat man dabei $(p^l - 1)(p^l - p)...(p^l - p^{l-1})$ mal Basen eines festen V durchlaufen. Also ist die Anzahl der Untervektorräume $V \subset \mathbb{F}_p^n$ mit $\dim V = l$ der Quotient der beiden Anzahlen,

$$\frac{(p^n - 1)(p^n - p)...(p^n - p^{l-1})}{(p^l - 1)(p^l - p)...(p^l - p^{l-1})} = \frac{(p^n - 1)(p^{n-1} - 1)...(p^{n-l+1} - 1)}{(p^l - 1)(p^{l-1} - 1)...(p - 1)}.$$