Klausur am 06.02.2015
zur Linearen Algebra I

Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 90 Minuten. Insgesamt kann man 48 Punkte erreichen. Die Klausur umfaßt 8 Aufgaben zu je 6 Punkten. Die Aufgaben sind aber verschieden schwer.
Geben Sie da, wo es etwas zu rechnen oder zu beweisen gibt, hinreichend viele Zwischenschritte an, so dass ich sehen kann, wie Sie die Aufgaben gelöst haben.
Es sind keine Hilfsmittel erlaubt: Es dürfen weder eigene Aufzeichnungen noch Bücher und auch keine Taschenrechner verwendet werden.

Bitte geben Sie dieses Blatt mit ab. Bitte schreiben Sie auf jedes weitere Blatt, das Sie abgeben, ihren Vor- und Nachnamen und Ihre Matrikelnummer.
Für abgegebene Blätter ohne diese Angaben kann ich keine Punkte vergeben!

Vor- und Nachname:
Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$	Note

Bitte wenden Sie dieses Aufgabenblatt erst auf Aufforderung.

1. *(6=2+3+1 Punkte)*

   (a) Sei V ein K-Vektorraum. Definieren Sie den Begriff *Untervektorraum von* V.

   (b) Sei V ein K-Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen von V.

      (i) Geben Sie die Bedingung dafür an, dass die Familie ein *Erzeugendensystem* von V ist.

      (ii) Geben Sie die Bedingung dafür an, dass die Familie *linear unabhängig* ist.

      (iii) Geben Sie die Bedingungen dafür an, dass die Familie eine *Basis* von V ist.

   (c) Sei V ein Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$. Formulieren Sie die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung* (die Ungleichung reicht; wann Gleichheit auftritt, müssen Sie nicht formulieren).

2. *(6=2+2+2 Punkte)*

   (a) Sei $n \in \mathbb{N}$, sei K ein Körper, seien $A, B \in M(n\times n, K)$, seien $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $i \neq j$, sei $\lambda \in K^*$. Vervollständigen Sie die folgenden Aussagen, indem Sie die Fragezeichen geeignet ersetzen.

$$\begin{aligned} (A\cdot B)^{-1} &= ?, \quad (A\cdot B)^{tr} = ?, \\ Z^{mat}_?(?)\cdot Z^{mat}_{II}(\lambda; i, j) &= E_n, \quad Z^{mat}_?(?)\cdot Z^{mat}_I(\lambda; i) = E_n. \end{aligned}$$

   (b) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Seien $\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{A}}, \mathcal{B}$ und $\widetilde{\mathcal{B}}$ Basen von V. Ersetzen Sie in den folgenden Gleichungen die Fragezeichen so, dass eine vernünftige Ausage da steht.

$$M(\mathcal{B}, \mathcal{A})^{-1} = ?, \quad M(\widetilde{\mathcal{B}}, f, \widetilde{\mathcal{A}}) = ?\cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A})\cdot\, ?.$$

   (c) Sei $A \in M(n \times n, K)$. Definieren Sie die Komplementärmatrix $A^\sharp$ von A.

3. *(6=2+4 Punkte)*

   (a) Malen Sie einen hinreichend großen Kreis, der den Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{C}$ darstellen soll. Tragen Sie darin die Zahlen $e^{2\pi ik/6}$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ein, und geben Sie für alle sechs Zahlen Realteil und Imaginärteil an.

   (b) Bringen Sie die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{F}_3)$$

   in Zeilenstufenform und geben Sie ihren Zeilenrang an. Schreiben Sie nach maximal 2 Zeilenumformungen die jeweils erhaltene Matrix hin. Notieren Sie auch, welche Zeilenumformungen Sie wann benutzen. ($\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}_3$ enthält nur die Zahlen $0, 1, 2$. Ich möchte hier keine anderen Zahlen sehen.)

4. *(6=2+4 Punkte)*

   (a) Die obere Zeile der folgenden Tabelle zeigt die Elemente ungleich 0 des Körpers $\mathbb{F}_{11} = \mathbb{Z}_{11}$ (mit den Verknüpfungen $+_{11}$ und $\cdot_{11}$). Schreiben Sie in die untere Zeile die inversen Elemente bezüglich der Multiplikation.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

   (b) Schreiben Sie die Permutationen

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 6 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi := (1\ 3\ 2\ 4)(2\ 6\ 5)(3\ 4\ 5)$$

   als Produkte zyklischer Permutationen mit disjunkten Trägern, und bestimmen Sie $\operatorname{sign}(\sigma)$ und $\operatorname{sign}(\varphi)$ (die Formel für das Signum einer zyklischen Permutation können Sie ohne Begründung benutzen).

5. *(6 Punkte)* Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ hat 3 verschiedene Eigenwerte, die übrigens alle ganzzahlig sind. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

6. *(6 Punkte)* Betrachten Sie den $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt ϕ. Die Vektoren

$$a_1 := (1,1,1), \quad a_2 := (1,1,0), \quad a_3 := (1,0,0)$$

   bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Wenden Sie auf diese Basis das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an. (Sie dürfen die Vektoren *nicht* vertauschen.) Nennen Sie die erhaltene Orthogonalbasis (b_1, b_2, b_3). Normieren Sie sie zu einer ON-Basis (c_1, c_2, c_3). Schreiben Sie alle Rechnungen und die Basen (b_1, b_2, b_3) und (c_1, c_2, c_3) auf.

7. *(6=2+4 Punkte)*

   (a) Sei
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = (\delta_{i+1,j}) \in M(n \times n, \mathbb{C}).$$

   Berechnen Sie $A^2, A^3, ..., A^n$, und bestimmen Sie $\ker(l_{A^k}) \subset M(n \times 1, \mathbb{C})$ für $k = 1, ..., n$. Hier ist l_{A^k} die lineare Abbildung

$$l_{A^k} : M(n \times 1, \mathbb{C}) \to M(n \times 1, \mathbb{C}), \quad v \mapsto A^k \cdot v.$$

   (b) Sei $B \in M(n \times n, K)$. Sei $p_B(t) \in K[t]$ das charakteristische Polynom von B. Beweisen Sie für $\lambda \in K$:

$$p_B(\lambda) = 0 \iff \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } B.$$

8. *(6 Punkte)* Seien $n, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $0 \leq l \leq n$, und sei p eine Primzahl. Bestimmen Sie die Anzahl der $\mathbb{F}_p$-Untervektorräume $V \subset \mathbb{F}_p^n$ mit $\dim V = l$.

   Hinweis: Es ist nützlich, zuerst für $m \in \{n, l\}$ die Anzahl

$$|\{(b_1, ..., b_l) \in (\mathbb{F}_p^m)^l \mid (b_1, ..., b_l) \text{ ist linear unabhängig in } \mathbb{F}_p^m\}|$$

   zu bestimmen.

Viel Erfolg!