

Lösungen zur Version B der Klausur am 19.12.2014 zur Linearen Algebra I

1. (6=2+3+1 Punkte)

(a) Sei (G, \cdot) eine Gruppe und $U \subset G$ eine nichtleere Teilmenge. U heißt *Untergruppe* von G , falls gilt:

$$\begin{aligned} a, b \in U &\Rightarrow a \cdot b \in U, \\ a \in U &\Rightarrow a^{-1} \in U. \end{aligned}$$

(b) Ein K -Vektorraum ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\cdot : K \times V \rightarrow V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$, mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Ein Distributivgesetz: für $\lambda, \mu \in K, v \in V$ $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$.
- (ii) Ein anderes Distributivgesetz: für $\lambda \in K, v, w \in V$ $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$.
- (iii) Ein Assoziativgesetz: für $\lambda, \mu \in K, v \in V$ $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$.
- (iv) Das Einselement 1_K von K erfüllt: für $v \in V$ $1_K \cdot v = v$.

(c)

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(a) + f(b) && \text{für } a, b \in V, \\ f(\lambda \cdot a) &= \lambda \cdot f(a) && \text{für } \lambda \in K, a \in V. \end{aligned}$$

2. (6=2+3+1 Punkte)

(a)

$$\begin{aligned} \det A \cdot \det B &= \det(A \cdot B), \\ A \text{ invertierbar} &\iff \det A \neq 0, \\ A \cdot A^\# &= \det A \cdot E_n, \\ \text{im Fall } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ invertierbar ist } A^{-1} &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Im Fall $b = 0$ ist $\text{Lös}(A, b)$ ein Untervektorraum von $M(n \times 1, K)$ der Dimension $\dim \text{Lös}(A, b) = n - \text{rang } A$.

Sei $U := \text{span}_K(\text{Spalten von } A) \subset M(m \times 1, K)$. Im Fall $b \neq 0$ ist $\text{Lös}(A, b) = \emptyset$ falls $b \notin U$ ist. Falls $b \in U$ ist, ist

$$\text{Lös}(A, b) = (\text{eine spezielle Lösung}) + \text{Lös}(A, 0).$$

(c) B_j entsteht aus A , indem man die j -te Spalte von A durch B ersetzt.

3. (6=2+4 Punkte)

(a) Es gibt einen Körper K und $n, m \in \mathbb{N}$ und endlichdimensionale K -Vektorräume V und W , so dass folgendes gilt:

$f : V \rightarrow W$ ist eine lineare Abbildung, $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ ist eine Basis von V , $f(\mathcal{A}) = (f(a_1), \dots, f(a_n))$, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$ ist eine Basis von W , und $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A}) \in M(m \times n, K)$.

(b) $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B} \cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A}),$

$$\begin{aligned} f(\mathcal{B}) &= (f(1), f(t), f(t^2), f(t^3)) \\ &= (t \cdot 0 + 0, t \cdot 1 + 0, t \cdot 2t + 2, t \cdot 3t^2 + 6t) \\ &= (0, t, 2t^2 + 2, 3t^3 + 6t) = (1, t, t^2, t^3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{also } M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. (6=2+4 Punkte)

(a)

$$\psi = (6 \ 1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 5), \quad \text{sign}(\psi) = -1.$$

(b)

$$\beta_1 = \frac{1}{3-4i} + \frac{2+i}{25} = \frac{3+4i}{25} + \frac{2+i}{25} = \frac{5+5i}{25} = \frac{1+i}{5},$$

$$\Re(\beta_1) = \frac{1}{5}, \quad \Im(\beta_1) = \frac{1}{5}, \quad |\beta_1| = \frac{\sqrt{2}}{5},$$

$$\beta_2 = (e^{2\pi i \cdot 1/6})^{2014} = e^{2\pi i \cdot 4/6},$$

$$(\text{denn } 2014 = 4 + 6 \cdot 332, \quad (e^{2\pi i \cdot 1/6})^6 = 1)$$

$$\beta_2 = e^{2\pi i \cdot 2/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \Re(\beta_2) = -\frac{1}{2}, \quad \Im(\beta_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad |\beta_2| = 1.$$

5. (6 Punkte)

$$P_B(t) = \det \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 0 & -4 & t \end{pmatrix} = t(t^2 - 4) = t(t-2)(t+2).$$

Die Eigenwerte von B sind 0, 2 und -2 . Ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist eine Lösung des homogenen Gleichungssystems $(B - \lambda \cdot E_3) \cdot x = 0$. Im folgenden bezeichnet " \sim " Zeilenumformungen.

Zum Eigenwert 0:

$$B - 0 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ein Eigenvektor ist } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zum Eigenwert 2:

$$B - 2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ein Eigenvektor ist } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Zum Eigenwert -2:

$$B - 2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ein Eigenvektor ist } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

6. (6 Punkte)

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 = (0, 1, 1), \quad \|b_1\|^2 = 2, \\ b_2 &= a_2 - \frac{\phi(a_2, b_1)}{\|b_1\|^2} b_1 = (0, 1, 2) - \frac{3}{2}(0, 1, 1) = \frac{1}{2}(0, -1, 1), \quad \|b_2\|^2 = \frac{1}{2}, \\ b_3 &= a_3 - \frac{\phi(a_3, b_1)}{\|b_1\|^2} b_1 - \frac{\phi(a_3, b_2)}{\|b_2\|^2} b_2 = (3, 1, 0) - \frac{1}{2}(0, 1, 1) - \frac{-1/2}{1/2} \cdot \frac{1}{2}(0, -1, 1) \\ &= (3, 1, 0) - \frac{1}{2}(0, 1, 1) + \frac{1}{2}(0, -1, 1) = (3, 0, 0), \quad \|b_3\|^2 = 9. \end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \quad c_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1), \quad c_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = (1, 0, 0).$$

7. (6=2+4 Punkte)

(a)

$$\|w_1\| = 1, \quad \|w_2\| = 2, \quad \|w_3\| = 3.$$

$$\begin{aligned} \cos \angle(w_1, w_2) &= \frac{\phi(w_1, w_2)}{\|w_1\| \cdot \|w_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{1 \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \angle(w_1, w_2) = \frac{\pi}{4}, \\ \cos \angle(w_1, w_3) &= \frac{\phi(w_1, w_3)}{\|w_1\| \cdot \|w_3\|} = \frac{0}{1 \cdot 3} = 0, \quad \angle(w_1, w_3) = \frac{\pi}{2}, \\ \cos \angle(w_2, w_3) &= \frac{\phi(w_2, w_3)}{\|w_2\| \cdot \|w_3\|} = \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}, \quad \angle(w_2, w_3) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

(b) Die Vektoren $\frac{x}{\|x\|}$ und $\frac{y}{\|y\|}$ haben Länge 1. Es ist (mit $\pm =$ plus oder minus)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \phi\left(\frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|}\right) \\ &= \phi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right) \pm 2\phi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) + \phi\left(\frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \\ &= 1 \pm 2\frac{\phi(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} + 1, \end{aligned}$$

also

$$-(\pm 1)\phi(x, y) \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

also

$$|\phi(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

8. (6=4+2 Punkte)

(a)

$$\begin{aligned} A \cdot v &= \lambda \cdot v, \\ \bar{v}^{tr} \cdot A &= \bar{v}^{tr} \cdot \bar{A}^{tr} = \overline{(A \cdot v)^{tr}} = \overline{\lambda \cdot v^{tr}} = \bar{\lambda} \cdot \bar{v}^{tr}, \\ \bar{\lambda} \cdot (\bar{v}^{tr} \cdot v) &= (\bar{\lambda} \cdot \bar{v}^{tr}) \cdot v = (\bar{v}^{tr} \cdot A) \cdot v = \bar{v}^{tr} \cdot (A \cdot v) = \bar{v}^{tr} \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (\bar{v}^{tr} \cdot v). \end{aligned}$$

Wegen $\bar{v}^{tr} \cdot v > 0$, also insbesondere $\neq 0$, ist $\bar{\lambda} = \lambda$, also ist λ reell.

(b)

$$\lambda_1 \cdot (v_1^{tr} \cdot v_2) = (\lambda_1 \cdot v_1^{tr}) \cdot v_2 = (v_1^{tr} \cdot A) \cdot v_2 = v_1^{tr} \cdot (A \cdot v_2) = v_1^{tr} \cdot (\lambda_2 \cdot v_2) = \lambda_2 \cdot (v_1^{tr} \cdot v_2).$$

Wegen $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ ist $v_1^{tr} \cdot v_2 = 0$, also $v_1 \perp v_2$.