Lösungen zur Version A der Klausur am 19.12.2014 zur Linearen Algebra I

1. *(6=2+3+1 Punkte)*

   (a) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $U \subset G$ eine nichtleere Teilmenge. U heißt *Untergruppe* von G, falls gilt:

   $$\begin{aligned} a, b \in U \quad &\Rightarrow \quad a \cdot b \in U, \\ a \in U \quad &\Rightarrow \quad a^{-1} \in U. \end{aligned}$$

   (b) Ein K-Vektorraum ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\cdot : K \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$, mit folgenden Eigenschaften:

   (i) Ein Distributivgesetz: für $\lambda, \mu \in K, v \in V \quad (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$.

   (ii) Ein anderes Distributivgesetz: für $\lambda \in K, v, w \in V \quad \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$.

   (iii) Ein Assoziativgesetz: für $\lambda, \mu \in K, v \in V \quad \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$.

   (iv) Das Einselement 1_k von K erfüllt: für $v \in V \quad 1_K \cdot v = v$.

   (c)

   $$\begin{aligned} f(a + b) = f(a) + f(b) \qquad &\text{für } a, b \in V, \\ f(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot f(a) \qquad &\text{für } \lambda \in K, a \in V. \end{aligned}$$

2. *(6=2+3+1 Punkte)*

   (a)

   $$\begin{aligned} \det A \cdot \det B \quad &= \quad \det(A \cdot B), \\ A \text{ invertierbar} \quad &\Longleftrightarrow \quad \det A \neq 0, \\ A \cdot A^\sharp \quad &= \quad \det A \cdot E_n, \\ \text{im Fall } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ invertierbar ist } A^{-1} \quad &= \quad \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   (b) Im Fall $b = 0$ ist $\text{Lös}(A, b)$ ein Untervektorraum von $M(n \times 1, K)$ der Dimension $\dim \text{Lös}(A, b) = n - \text{rang}\, A$.

   Sei $U := \text{span}_K(\text{Spalten von } A) \subset M(m \times 1, K)$. Im Fall $b \neq 0$ ist $\text{Lös}(A, b) = \emptyset$ falls $b \notin U$ ist. Falls $b \in U$ ist, ist

   $$\text{Lös}(A, b) = (\text{eine spezielle Lösung}) + \text{Lös}(A, 0).$$

   (c) B_j entsteht aus A, indem man die j-te Spalte von A durch B ersetzt.

3. *(6=2+4 Punkte)*

   (a) Es gibt einen Körper K und $n, m \in \mathbb{N}$ und endlichdimensionale K-Vektorräume V und W, so dass folgendes gilt:

   $f : V \to W$ ist eine lineare Abbildung, $\mathcal{A} = (a_1, ..., a_n)$ ist eine Basis von V, $f(\mathcal{A}) = (f(a_1), ..., f(a_n))$, $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_m)$ ist eine Basis von W, und $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A}) \in M(m \times n, K)$.

(b) $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B} \cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A})$,

$$\begin{aligned} f(\mathcal{B}) &= (f(1), f(t), f(t^2), f(t^3)) \\ &= (t\cdot 0 + 0, t\cdot 1 + 0, t\cdot 2t + 2, t\cdot 3t^2 + 6t) \\ &= (0, t, 2t^2+2, 3t^3+6t) = (1, t, t^2, t^3)\cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. *(6=2+4 Punkte)*

   (a)

$$\sigma = (1\ 6\ 4\ 5\ 3\ 2), \qquad \operatorname{sign}(\sigma) = -1.$$

   (b)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{4+3i} + \frac{1-2i}{25} = \frac{4-3i}{25} + \frac{1-2i}{25} = \frac{5-5i}{25} = \frac{1-i}{5}, \\ & \Re(\alpha_1) = \frac{1}{5}, \quad \Im(\alpha_1) = \frac{-1}{5}, \quad |\alpha_1| = \frac{\sqrt{2}}{5}, \\ \alpha_2 &= (e^{2\pi i\cdot 1/8})^{2014} = e^{2\pi i\cdot 6/8}, \\ & (\text{denn } 2014 = 6 + 8\cdot 251, \quad (e^{2\pi i\cdot 1/8})^8 = 1) \\ \alpha_2 &= e^{2\pi i\cdot 3/4} = -i, \quad \Re(\alpha_2) = 0, \quad \Im(\alpha_2) = -1, \quad |\alpha_2| = 1. \end{aligned}$$

5. *(6 Punkte)*

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 0 & 2 & t-3 \end{pmatrix} = t(t(t-3)+2) = t(t^2-3t+2) = t(t-1)(t-2).$$

Die Eigenwerte von A sind 0, 1 und 2. Ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist eine Lösung des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda\cdot E_3)\cdot x = 0$. Im folgenden bezeichnet " $\sim$ " Zeilenumformungen.

Zum Eigenwert 0:

$$A - 0\cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ein Eigenvektor ist } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zum Eigenwert 1:

$$A - 1\cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ein Eigenvektor ist } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zum Eigenwert 2:

$$A - 2\cdot E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ein Eigenvektor ist } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

6. *(6 Punkte)*

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1 = (1,1,1), \quad \|b_1\|^2 = 3, \\
b_2 &= a_2 - \frac{\phi(a_2,b_1)}{\|b_1\|^2} b_1 = (2,1,1) - \frac{2+1+1}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(2,-1,-1), \quad \|b_2\|^2 = \frac{2}{3}, \\
b_3 &= a_3 - \frac{\phi(a_3,b_1)}{\|b_1\|^2} b_1 - \frac{\phi(a_3,b_2)}{\|b_2\|^2} b_2 = (0,0,2) - \frac{2}{3}(1,1,1) - \frac{-2/3}{2/3} \cdot \frac{1}{3}(2,-1,-1) \\
&= (0,0,2) - \frac{2}{3}(1,1,1) + \frac{1}{3}(2,-1,-1) = (0,-1,1), \quad \|b_3\|^2 = 2.
\end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \quad c_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1), \quad c_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1).$$

7. *(6=2+4 Punkte)*

(a)

$$\|v_1\| = 1, \quad \|v_2\| = 2, \quad \|v_3\| = 3.$$

$$\begin{aligned}
\cos\measuredangle(v_1,v_2) &= \frac{\phi(v_1,v_2)}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{1\cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \measuredangle(v_1,v_2) = \frac{\pi}{4}, \\
\cos\measuredangle(v_1,v_3) &= \frac{\phi(v_1,v_3)}{\|v_1\|\cdot\|v_3\|} = \frac{0}{1\cdot 3} = 0, \quad \measuredangle(v_1,v_3) = \frac{\pi}{2}, \\
\cos\measuredangle(v_2,v_3) &= \frac{\phi(v_2,v_3)}{\|v_2\|\cdot\|v_3\|} = \frac{3}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}, \quad \measuredangle(v_2,v_3) = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Die Vektoren $\frac{x}{\|x\|}$ und $\frac{y}{\|y\|}$ haben Länge 1. Es ist (mit $\pm$ = plus oder minus)

$$\begin{aligned}
0 &\leq \phi\left(\frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|}\right) \\
&= \phi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right) \pm 2\phi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) + \phi\left(\frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \\
&= 1 \pm 2\frac{\phi(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|} + 1,
\end{aligned}$$

also

$$-(\pm 1)\phi(x,y) \leq \|x\|\cdot\|y\|,$$

also

$$|\phi(x,y)| \leq \|x\|\cdot\|y\|.$$

8. *(6=4+2 Punkte)*

(a)

$$\begin{aligned}
A \cdot v &= \lambda \cdot v, \\
\overline{v}^{tr} \cdot A &= \overline{v}^{tr} \cdot \overline{A}^{tr} = \overline{(A\cdot v)^{tr}} = \overline{\lambda \cdot v^{tr}} = \overline{\lambda} \cdot \overline{v}^{tr}, \\
\overline{\lambda} \cdot (\overline{v}^{tr} \cdot v) &= (\overline{\lambda} \cdot \overline{v}^{tr}) \cdot v = (\overline{v}^{tr} \cdot A) \cdot v = \overline{v}^{tr} \cdot (A \cdot v) = \overline{v}^{tr} \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (\overline{v}^{tr} \cdot v).
\end{aligned}$$

Wegen $\overline{v}^{tr} \cdot v > 0$, also insbesondere $\neq 0$, ist $\overline{\lambda} = \lambda$, also ist λ reell.

(b)

$$\lambda_1 \cdot (v_1^{tr} \cdot v_2) = (\lambda_1 \cdot v_1^{tr}) \cdot v_2 = (v_1^{tr} \cdot A) \cdot v_2 = v_1^{tr} \cdot (A \cdot v_2) = v_1^{tr} \cdot (\lambda_2 \cdot v_2) = \lambda_2 \cdot (v_1^{tr} \cdot v_2).$$

Wegen $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ ist $v_1^{tr} \cdot v_2 = 0$, also $v_1 \perp v_2$.