

Klausur am 19.12.2014 zur Linearen Algebra I

Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 90 Minuten. Insgesamt kann man 48 Punkte erreichen. Die Klausur umfaßt 8 Aufgaben zu je 6 Punkten. Die Aufgaben sind aber verschieden schwer.

Geben Sie da, wo es etwas zu rechnen oder zu beweisen gibt, hinreichend viele Zwischenschritte an, so dass wir sehen können, wie Sie die Aufgaben gelöst haben.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt: Es dürfen weder eigene Aufzeichnungen noch Bücher und auch keine Taschenrechner verwendet werden.

Bitte geben Sie dieses Blatt mit ab. Bitte schreiben Sie auf jedes weitere Blatt, das Sie abgeben, ihren Vor- und Nachnamen und Ihre Matrikelnummer.

Für abgegebene Blätter ohne diese Angaben können wir keine Punkte vergeben!

Vor- und Nachname:
Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Note

(Version A)

Bitte wenden Sie dieses Aufgabenblatt erst auf Aufforderung.

1. (6=2+3+1 Punkte)

- (a) Definieren Sie den Begriff *Untergruppe*. Den Begriff *Gruppe* können Sie als bekannt voraussetzen.
- (b) Sei K ein Körper. Definieren Sie den Begriff *K -Vektorraum*. Den Begriff *abelsche Gruppe* können Sie als bekannt voraussetzen.
- (c) Seien V und W zwei K -Vektorräume. Geben Sie die Bedingungen an, die eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ erfüllen muss, um eine lineare Abbildung zu sein.

2. (6=2+3+1 Punkte)

- (a) Sei K ein Körper, und seien $A, B \in M(n \times n, K)$. Vervollständigen Sie die folgenden Aussagen, indem Sie die Fragezeichen geeignet ersetzen.

$$\begin{aligned} \det A \cdot \det B &= ?, \\ A \text{ invertierbar} &\iff \det A \text{ ?}, \\ A \cdot A^\# &= ?, \end{aligned}$$

$$\text{im Fall } n = 2 \text{ und } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ invertierbar ist } A^{-1} = ?.$$

- (b) Sei K ein Körper, $A \in M(m \times n, K)$, $b \in M(m \times 1, K)$. Dann ist $A \cdot x = b$ ein lineares Gleichungssystem mit Lösungsraum

$$\text{Lös}(A, b) := \{x \in M(n \times 1, K) \mid A \cdot x = b\}.$$

Was weiß man im Fall $b = 0$ über $\text{Lös}(A, b)$? Wie kann $\text{Lös}(A, b)$ im Fall $b \neq 0$ aussehen? (Hinweis: Fallunterscheidung.)

- (c) (Cramersche Regel, allgemeine Version) Sei R ein kommutativer Ring, $A \in M(n \times n, R)$, $b \in M(n \times 1, R)$. Eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ist $y = A^\# \cdot b = (y_1, \dots, y_n)^{tr}$ mit $y_j = \det B_j$ mit geeignet definierten Matrizen B_j . Wie sind die Matrizen B_j definiert?

3. (6=2+4 Punkte)

- (a) Geben Sie an, was für Objekte $\mathcal{A}, \mathcal{B}, f, f(\mathcal{A}), M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A})$ in der folgenden Gleichung sind:

$$f(\mathcal{A}) = \mathcal{B} \cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A}).$$

Sie brauchen *nicht* die Beziehung zwischen $\mathcal{B}, f, \mathcal{A}$ und $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A})$ zu erklären.

- (b) $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 3} := \{g \in \mathbb{R}[t] \mid \deg g \leq 3\}$ ist ein 4-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. Eine Basis ist $\mathcal{B} = (1, t, t^2, t^3)$. Die Abbildung

$$f : V \rightarrow V, \quad g(t) \mapsto t \cdot \frac{d}{dt}g(t) + \frac{d^2}{dt^2}g(t)$$

ist linear. Bestimmen Sie $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$.

4. (6=2+4 Punkte)

- (a) Schreiben Sie die Permutation $\sigma := (1\ 2\ 3\ 4)(2\ 4\ 5)(1\ 6\ 3)$ als Produkt zyklischer Permutationen mit disjunkten Trägern, und bestimmen Sie $\text{sign}(\sigma)$ (die Formel für das Signum einer zyklischen Permutation können Sie ohne Begründung benutzen).
- (b) Bestimmen Sie den Realteil, den Imaginärteil und den Betrag der folgenden beiden komplexen Zahlen,

$$\alpha_1 := \frac{1}{4+3i} + \frac{1-2i}{25}, \quad \alpha_2 := (e^{2\pi i \cdot 1/8})^{2014}.$$

5. (6 Punkte) Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ hat 3 verschiedene Eigenwerte, die übrigens alle ganzzahlig sind. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

6. (6 Punkte) Betrachten Sie den \mathbb{R}^3 mit dem Standardskalarprodukt ϕ . Die Vektoren

$$a_1 := (1, 1, 1), \quad a_2 := (2, 1, 1), \quad a_3 := (0, 0, 2)$$

bilden eine Basis des \mathbb{R}^3 . Wenden Sie auf diese Basis das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an. Nennen Sie die erhaltene Orthogonalbasis (b_1, b_2, b_3) . Normieren Sie sie zu einer ON-Basis (c_1, c_2, c_3) . Schreiben Sie alle Rechnungen und die Basen (b_1, b_2, b_3) und (c_1, c_2, c_3) auf.

7. (6=2+4 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie für die 3 Vektoren

$$v_1 := (1, 0, 0), \quad v_2 := (\sqrt{2}, 1, -1), \quad v_3 := (0, 3, 0)$$

im \mathbb{R}^3 mit dem Standardskalarprodukt ϕ ihre Längen $\|v_1\|$, $\|v_2\|$, $\|v_3\|$ und die Winkel $\angle(v_1, v_2)$, $\angle(v_1, v_3)$ und $\angle(v_2, v_3)$ zwischen ihnen.

- (b) Sei V ein Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ . Seien x und y in $V - \{0\}$. Zeigen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\phi(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. (Die Zusatzaussage, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind, müssen Sie nicht zeigen.)

8. (6=4+2 Punkte) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch (d.h. $A = A^{tr}$).

Bemerkungen: (i) Es ist bekannt, dass $P_A(t)$ in Linearfaktoren $t - \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ zerfällt. Die auftretenden λ 's sind die Eigenwerte von A als komplexe Matrix. Zu jedem λ gibt es einen Eigenvektor $v \in M(n \times 1, \mathbb{C}) - \{0\}$. Dann ist $A \cdot v = \lambda \cdot v$ und $v^{tr} \cdot A = v^{tr} \cdot A^{tr} = (A \cdot v)^{tr} = \lambda \cdot v^{tr}$.

(ii) Für $w \in M(n \times 1, \mathbb{C}) - \{0\}$ sei $\bar{w} := (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n)^{tr}$. Dann ist $\bar{w}^{tr} \cdot w > 0$.

- (a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A (als komplexe Matrix) reell sind.
- (b) Seien v_1 und $v_2 \in M(n \times 1, \mathbb{R}) - \{0\}$ Eigenvektoren von A zu verschiedenen reellen Eigenwerten λ_1 und λ_2 . Zeigen Sie $v_1 \perp v_2$ [d.h. $0 = v_1^{tr} \cdot v_2$].

Viel Erfolg!