Lineare Algebra I, HWS 2014, Mannheim

Ergänzungen in der großen Übung zu Kapitel 1

Beispiel 1.22 Die Elemente der S_3 sind:

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Alle Permutationen $\sigma \in S_3 - \{id\}$ sind zyklisch:

$$\sigma_1 = (23), \quad \sigma_2 = (13), \quad \sigma_3 = (12), \quad \sigma_4 = (123), \quad \sigma_5 = (132)\,.$$

Für S_n mit $n \geq 4$ gilt diese Aussage NICHT mehr. Betrachte beispielsweise das Element:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)\,(34)\,.$$

Die inversen Elemente sind:

$$\sigma_1^{-1} = \sigma_1, \quad \sigma_2^{-1} = \sigma_2, \quad \sigma_3^{-1} = \sigma_3, \quad \sigma_4^{-1} = \sigma_5, \quad \sigma_5^{-1} = \sigma_4\,.$$

Definition 1.23 Sei $\sigma \in S_n$. Der Träger von σ, $Tr(\sigma)$ ist die Menge

$$\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \sigma(i) \neq i\}\,.$$

Bemerkung 1.24 Der Träger einer zyklischen Permutation

$$\sigma = (a_1 \ldots a_k) \in S_n$$

ist die Menge $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

Satz 1.25 *Jede Permutation $\sigma \in S_n - \{\mathrm{id}\}$ ist ein Produkt von eindeutig bestimmten zyklischen Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern (d.h. je zwei Träger haben leere Schnittmenge). Diese zyklischen Permutationen kommutieren. Daher kommt es bei der Darstellung von σ als Produkt von ihnen nicht auf die Reihenfolge an.*

Beispiel 1.26 Sei

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_6\,.$$

Dann ist

$$1 \mapsto 3 \mapsto 6 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 5 \mapsto 2, \quad 4 \mapsto 4,$$

also

$$\sigma = (136)(25) = (25)(136) = (52)(361) = (613)(52) = \ldots\,.$$

Beweis von Satz 1.25:
Sei $\sigma \in S_n - \{id\}$. Wir zeigen zuerst, dass $\sigma^m(1) = 1$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Man betrachtet die Menge $\{1, \sigma(1), \sigma^2(1), \sigma^3(1), \ldots\}$. Angenommen $\sigma^k(1) \neq \sigma^l(1)$ für alle $k \neq l$ mit $k, l \in \mathbb{N}_0$, dann wäre $\#\{1, \sigma(1), \sigma^2(1), \ldots\} = \infty$, was nicht möglich ist. Daher gibt es $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $\sigma^k(1) = \sigma^l(1)$. Wir können annehmen, dass $k \leq l$ gilt. Daraus folgt

$$1 = \sigma^{-k}(1) \circ \sigma^k(1) = \sigma^{-k} \circ \sigma^l(1) = \sigma^{l-k}(1)\,.$$

Mit $m := l - k$ gilt dann $\sigma^m(1) = 1$ und die Einschränkung σ auf $\{1, \sigma(1), \ldots, \sigma^{m-1}(1)\}$ ist zyklisch. Weil σ eine Bijektion ist, operiert σ bijektiv auf $\{1, ..., n\} - \{1, \sigma(1), ..., \sigma^{m-1}(1)\}$. Man wiederholt das Argument mit einem Element dieser Menge (z.B. mit dem kleinsten) anstelle von 1. Man wiederholt das Argument solange, bis man alle Elemente von $\{1, ..., n\}$ erfaßt hat.

Lemma 1.27 *Sei $n \geq 2$. Zu jeder Permutation $\sigma \in S_n$ gibt es Transpositionen $\tau_1, ..., \tau_k$ (k geeignet) mit*

$$\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_k$$

(k und $\tau_1, ..., \tau_k$ sind nicht eindeutig bestimmt; die Träger der τ_j sind im allgemeinen nicht disjunkt).

Beweis: id = (12)(12).
Sei $\sigma \in S_n - \{\text{id}\}$. Wegen Satz 1.25 können wir annehmen, daß σ zyklisch ist, $\sigma = (a_1 ... a_l)$. Dann ist

$$\sigma = (a_1 a_l)(a_1 a_{l-1}) ... (a_1 a_3)(a_1 a_2).$$

Beispiel: (1 4 5 2 3) = (1 3)(1 2)(1 5)(1 4). □

Bemerkung 1.28 k und $\tau_1, ..., \tau_k$ sind nicht eindeutig bestimmt. Die Träger der τ_j sind im allgemeinen nicht disjunkt. Satz 1.13 (vii) sagt aber immerhin, dass bei zwei Produkten $\tau_1 \circ ... \circ \tau_k = \sigma = \widetilde{\tau}_1 \circ ... \circ \widetilde{\tau}_l$ die Differenz $k - l$ gerade ist.