Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(1+1+1 Punkte)* Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine quadratische Matrix.
   (a) Definieren Sie das *charakteristische Polynom* $P_A(t)$ der Matrix A.
   (b) Definieren Sie, was bei der Matrix A ein *Eigenvektor* v, ein *Eigenwert* λ und der *Eigenraum* $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ zu einem Eigenwert λ sind. (Gehen Sie *nicht* über die Definition der analogen Objekte bei einem Endomorphismus, sondern geben Sie direkte Definitionen.)
   (c) Beweisen Sie: *$\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von $A \iff P_A(\lambda) = 0$.*

2. *(3 Punkte)* Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen Vektorraums (für ein $n \in \mathbb{N}$). Das charakteristische Polynom habe die Gestalt $P_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, d.h. das Polynom $P_f(t)$ hat n verschiedene Nullstellen $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Zeigen Sie:
$$\dim \mathrm{Eig}(f, \lambda) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } \lambda = \lambda_i \textit{ für ein } i \in \{1, ..., n\}, \\ 0 & \textit{sonst,} \end{cases}$$
   und wenn man Vektoren $v_i \in V$ mit $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i) = K \cdot v_i = \mathrm{span}(v_i)$ gewählt hat, so sind diese linear unabhängig.

   Hinweise: Der Beweis ist nicht so einfach (und mit 3 Punkten eigentlich unterbewertet). Er benutzt neben Satz 8.4 (a) auch die Vandermonde-Determinante.

   Bemerkungen: Daher ist dann f diagonalisierbar. Dies ist ein wichtiger Spezialfall eines *diagonalisierbaren* Endomorphismus (Definition 8.6 (a)). Wenn $P_f(t)$ lauter verschiedene Eigenwerte hat, ist man in diesem Spezialfall. Das ist bequem.

3. *(3 Punkte)* Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ in $M(3 \times 3, \mathbb{Q})$ hat 3 verschiedene Eigenwerte, die übrigens alle ganzzahlig sind. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix, die Eigenwerte, und zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

4. *(2+1 Punkte)* Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums.
   (a) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:
$$\ker(f^k) = \ker(f^{k+1}) \Rightarrow \ker(f^{k+1}) = \ker(f^{k+2}).$$
   (b) Der Hauptraum zu einer Zahl $\lambda \in K$ ist der Untervektorraum von V mit
$$\mathrm{Hau}(f, \lambda) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \ker((f - \lambda \cdot \mathrm{id})^k) \subset V.$$
   Zeigen Sie mit Hilfe von (a)
$$\begin{aligned} \mathrm{Hau}(f, \lambda) &= \ker((f - \lambda \cdot \mathrm{id})^{k_0}) \\ \text{mit} \quad k_0 &:= \min(k \mid \ker((f - \lambda \cdot \mathrm{id})^k) = \ker((f - \lambda \cdot \mathrm{id})^{k+1}). \end{aligned}$$

5. *(4 Punkte)* Die Matrix $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ in $M(3 \times 3, \mathbb{Q})$ hat nur ganzzahlige Eigenwerte, und zwar nur zwei, d.h. es ist $P_B(t) = (t - \lambda_1)^2(t - \lambda_2)$ für gewisse $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix, die Eigenwerte λ_1 und λ_2, die Eigenräume $\mathrm{Eig}(B, \lambda_1)$ und $\mathrm{Eig}(B, \lambda_2)$ und den Hauptraum $\mathrm{Hau}(B, \lambda_1)$. Geben Sie eine Basis (v_1, v_2, v_3) von $M(3 \times 1, \mathbb{Q})$ mit

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(B, \lambda_1) &= \mathrm{span}(v_1), \\ \mathrm{Hau}(B, \lambda_1) &= \mathrm{span}(v_1, v_2), \\ \mathrm{Eig}(B, \lambda_2) &= \mathrm{span}(v_3) \end{aligned}$$

an.

Abgabe bis Dienstag, den 25. November 2014, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5