Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *((1+2+1)+1 Punkte)*

   (a) Berechnen Sie die Komplementärmatrizen $A_1^\sharp$, $A_2^\sharp$ und $A_3^\sharp$ der drei Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 \\ 0 & c & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Benutzen Sie bei $A_3^\sharp$ bitte nicht Aufgabe 4 von Blatt 7. ($A_2^\sharp$ hat viele Nullen.)

   (b) Berechnen Sie $\det A_1$ mit Laplace-Entwicklung nach der dritten Spalte.

2. *((1+1)+3 Punkte)*

   (a) Formulieren Sie die Cramersche Regel in der allgemeinen Version (Ring R und $\det A$ beliebig) und in der klassischen Version ($\det A \neq 0$, Körper K).

   (b) Lösen Sie das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem mit $a, c, d \in \mathbb{C}$ mit Hilfe der klassischen Version der Cramerschen Regel.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & a \\ & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & c \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & d \end{array}$$

   Hinweise: (i) Dazu müssen Sie die Determinanten von vier (3×3)-Matrizen ausrechnen.
   (ii) Andere Lösungswege als die Cramersche Regel sind nicht zugelassen.

3. *(3 Punkte)* Beweisen Sie die folgende Formel mit vollständiger Induktion und mit Laplace-Entwicklung (wählen Sie selbst, nach welcher Zeile oder Spalte Sie entwickeln). Die Matrix ist eine $(n+1) \times (n+1)$-Matrix. Wo nichts steht, stehen Nullen.

$$\det \begin{pmatrix} -t & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & -t & -a_{n-1} \\ & & 1 & -t - a_n \end{pmatrix} = (-1)^{n+1}(t^{n+1} + a_n t^n + ... + a_0).$$

4. *(2+1 Punkte)*

   (a) Es sei

$$GL(n, \mathbb{Z}) := \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A \text{ und } A^{-1} \in M(n \times n, \mathbb{Z})\}.$$

   Zeigen Sie

$$Gl(n, \mathbb{Z}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{Z}) \mid \det A = \pm 1\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $GL(n, \mathbb{Z})$ eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{Q})$ ist.

Abgabe bis Dienstag, den 18. November 2014, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5