

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. (3 Punkte) Alice is as old as Betty and Christine together. Last year Betty was twice as old as Christine. Two years hence Alice will be twice as old as Christine. What are the ages of the three girls?
2. (4 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmengen in $M(4 \times 1, \mathbb{R})$ des folgenden inhomogenen Gleichungssystems und des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rclcl} 7x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 24 \\ - & 4x_1 & - & 3x_2 & & & - & x_4 & = & -17 \\ 7x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 27 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & & & = & 21 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \end{array}$$

3. (5 Punkte) Bestimmen Sie irgendwie die Determinanten der folgenden Matrizen (mit $\lambda, a, b, c \in \mathbb{R}$).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & \lambda & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 9 & 11 \\ 5 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ -a & 0 & 0 & c \\ -b & 0 & 0 & d \\ 0 & -c & -d & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Bei der fünften Matrix bietet sich die Leibniz-Formel an, denn aufgrund der vielen Nullen bleiben nur 4 Summanden übrig.

4. (4 Punkte) (Vandermonde-Determinante) Beweisen Sie die folgende Formel. Hier sind $x_1, \dots, x_n \in R$ für irgendeinen kommutativen Ring R mit 1.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Hier ist $\prod_{1 \leq i < j \leq n}$ das Produkt über alle Paare (i, j) mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und $i < j$.

Hinweise: Ziehen Sie zuerst die erste Zeile von den anderen Zeilen ab. Das verkleinert die Größe der relevanten Matrix um eins, wegen Bemerkung 7.2 (d). Dann ziehen Sie (mit Hilfe der der Multilinearität bezüglich der Zeilen) Faktoren $(x_j - x_1)$ aus der Determinante. Danach ziehen Sie (mit Hilfe der Multilinearität bezüglich der Spalten: die gilt auch, und die dürfen Sie auch benutzen!) geeignete Spalten voneinander ab. Nun sollten Sie mit vollständiger Induktion durchkommen.

Abgabe bis Dienstag, den 11. November 2014, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5