Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(2 Punkte)* Geben Sie an, was für Objekte $\mathcal{A}$, $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\mathcal{B}$, $\widetilde{\mathcal{B}}$ und f in der folgenden Gleichung aus Kapitel 5 sind, und geben Sie die definierenden Gleichungen für die 4 Matrizen $M(\widetilde{\mathcal{B}}, f, \widetilde{\mathcal{A}})$, $M(\widetilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B})$, $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A})$ und $M(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{A}})$ an:
$$M(\widetilde{\mathcal{B}}, f, \widetilde{\mathcal{A}}) = M(\widetilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}) \cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{A}}).$$

2. *(2 Punkte)* Eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 4 ist $\mathcal{B} := (1, t, t^2, t^3, t^4)$. Die Abbildung
$$f : \mathbb{R}[t]_{\leq 4} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 4}, \quad g(t) \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(g(t-1)),$$
ist linear (das brauchen Sie nicht zu beweisen). Bestimmen Sie $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$. Was ist der Rang von f?

3. *(1,5+1,5+2 Punkte)*
   (a) Die Matrix $C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist invertierbar. Berechnen Sie C^{-1}.

   (b) Die Tupel
$$\mathcal{B}^{(4)} = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}^{(3)} = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})$$
   sind die Standardbasen der $\mathbb{Q}$-Vektorräume $M(4 \times 1, \mathbb{Q})$ und $M(3 \times 1, \mathbb{Q})$. Die Tupel
$$\mathcal{A} = (\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = (\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix})$$
   sind andere Basen von $M(4 \times 1, \mathbb{Q})$ beziehungsweise von $M(3 \times 1, \mathbb{Q})$. Geben Sie (ohne Begründung) die Basiswechselmatrizen $M(\mathcal{B}^{(3)}, \mathcal{B})$, $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}^{(3)})$ und $M(\mathcal{B}^{(4)}, \mathcal{A})$ an. ($M(\mathcal{A}, \mathcal{B}^{(4)})$ brauchen Sie nicht zu bestimmen.)

   (c) Betrachten Sie die folgende lineare Abbildung f
$$\begin{array}{rcl} f : M(4 \times 1, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & M(3 \times 1, \mathbb{Q}), \\ x & \longmapsto & D \cdot x \end{array}$$
   wobei $D \in M(3 \times 4, \mathbb{Q})$ durch
$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
   gegeben ist. Bestimmen Sie $M(\mathcal{B}^{(3)}, f, \mathcal{B}^{(4)})$ und $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A})$.

4. *(2 Punkte)* Der Mathematiker Diophant hat irgendwann zwischen 150 und 350 unserer Zeitrechnung in Alexandria gelebt. Geburtsdatum und Todesdatum kennt man nicht. Aber über sein Alter gibt ein Epigramm aus späthellenistischer Zeit Auskunft, das als Grabinschrift gedacht werden soll. Hier ist eine deutsche Übersetzung.

   Hier dies Grabmal deckt Diophantos. Schaut das Wunder!
   Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.
   Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;
   Noch ein Zwölftel dazu sproßt' auf der Wange der Bart;
   Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe,
   Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.
   Wehe, das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre
   Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.
   Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer
   von sich scheuchend auch er kam an das irdische Ziel.

   Wie alt ist Diophant geworden?

   Ein Punkt zur Klärung: Der Sohn erreicht die Hälfte des Gesamtalters des Vaters (nicht die Hälfte des Alters des Vaters zum Zeitpunkt des Todes des Sohnes).

5. *(5 Punkte)* Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\text{Lös}(A, b)$ in $M(3 \times 1, \mathbb{R})$ des folgenden inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & 3x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & ax_2 & - & x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & ax_3 & = & 1 \end{array}$$

   Hinweise: (i) Satz 6.3 (c) ist hilfreich: Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ändert sich nicht, wenn man die Matrix $(A\ b)$ durch Zeilenumformungen abändert. Daher kann man mit dem Gauß-Algorithmus A auf obere Dreiecksgestalt bringen. Dann kann man die Lösungsmenge ziemlich leicht sehen, vgl. Satz 6.3.

   (ii) Man muß (nicht sofort, sondern später im Lauf der Rechnungen) 3 Fälle unterscheiden.

Abgabe bis Dienstag, den 04. November 2014, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5