Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(1+2 Punkte)*

   (a) Es gelten drei Formeln der Gestalt

   $$Z_?^{mat}(?)\cdot Z_I^{mat}(\lambda;i)=E_n,\quad Z_?^{mat}(?)\cdot Z_{II}^{mat}(\lambda;i,j)=E_n,\quad Z_?^{mat}(?)\cdot Z_{III}^{mat}(i,j)=E_n.$$

   Geben Sie (ohne Beweis) die präzisen Formeln an, wo die Fragezeichen durch die richtigen Indices ersetzt sind.

   Bemerkung: Die Formeln zeigen, dass die Matrizen $Z_I^{mat}(\lambda;i)$, $Z_{II}^{mat}(\lambda;i,j)$ und $Z_{III}^{mat}(i,j)$ invertierbar sind.

   (b) Es seien $A,B\in M(m\times n,K)$. Folgern Sie aus (a) und Argumenten im Beweis von Satz 4.13, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

   (i) B entsteht aus A durch Zeilenumformungen.

   (ii) Es gibt eine Matrix $C\in GL(m,K)$ mit $B=C\cdot A$.

2. *(1+1+1 Punkte)*

   (a) Gegeben ist eine Abbildung $f:V\to W$ von einem K-Vektorraum V in einen K-Vektorraum W. Welche Eigenschaften muß sie erfüllen, um *linear* zu sein? Geben Sie die Eigenschaften in Prosa *und* in Formeln an.

   (b) Sei $f:V\to W$ eine lineare Abbildung von einem K-Vektorraum V in einen K-Vektorraum W. Der Kern von f ist $\ker f:=\{v\in V\mid f(v)=0\}$. Er ist ein Untervektorraum von V, und es ist $0\in\ker f$. Geben Sie eine kurze Begründung für folgende Aussage:

   $$\ker f=\{0\}\iff f \text{ ist injektiv.}$$

   (c) Ist das Produkt von 2 oberen Dreiecksmatrizen wieder eine obere Dreiecksmatrix? Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antwort.

3. *(3 Punkte)* Die Matrix

   $$A=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&1&1\\2&2&3\end{pmatrix}\in M(3\times 3,\mathbb{Q})$$

   ist invertierbar. Berechnen Sie mit dem Algorithmus in Bemerkung 4.14 die inverse Matrix A^{-1}.

   Erinnerung: Man schreibt dazu A und E_3 nebeneinander und führt an ihnen dieselben elementaren Zeilenumformungen durch. Am Ende ist A in die Matrix E_3 überführt, und E_3 ist in die Matrix A^{-1} überführt.

4. *(3 Punkte)* Für $a, b, c, d, e, f \in K$, wo K ein beliebiger Körper ist, sind die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wegen Satz 4.13 (d) invertierbar. Es ist (das müssen Sie nicht beweisen)

$$A_1^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen das Inverse A_3^{-1} der Matrix A_3 mit Hilfe des Algorithmus in Bemerkung 4.14.

(Die Matrizen A_1 und A_2 stehen hier nur, damit Sie sehen, wie sich das Ergebnis Ihrer Rechnungen in eine Serie einbettet, und damit Sie die Richtigkeit ihres Ergebnisses abschätzen können.)

5. *(3+1 Punkte)*

   (a) Wieviele Elemente hat $GL(n, \mathbb{F}_p)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

   Hinweise: Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{F}_p)$ ist invertierbar, wenn ihre Zeilen $v_i := (a_{i1}, ..., a_{in})$, $i = 1, 2, ..., n$, linear unabhängig sind. Wenn man zuerst v_1 wählt, so hat man da $p^n - 1 = |\mathbb{F}_p^n - \{0\}|$ Möglichkeiten. Wieviele Möglichkeiten hat man danach für v_2, danach für $v_3, ...$ und am Ende für v_n? Da hilft vielleicht, dass die Antwort bei Aufgabe 2 (vi) von Blatt 6 JA lautet.

   (b) Geben Sie ohne Begründung die Elemente von $GL(2, \mathbb{F}_2)$ an.

Zur Zwischenklausur: Sie findet am 25.10.2014 (Samstag) um 12:15-13:45 in 2 Hörsälen, im großen Hörsaal 001 in A3, und im Hörsaal SN 169 im Hauptgebäude statt. Wer in welchen Hörsaal gehen soll, wird demnächst festgelegt. Sie müssen Stifte und einen Ausweis (ecum Karte oder Personalausweis) und einen klaren Kopf mitbringen, sonst nichts (Material zur LA I oder Taschenrechner etc sind nicht erlaubt). Papier wird gestellt. Betreten Sie den Hörsaal erst nach Aufforderung, und setzen Sie sich dann auf einen der vorbereiteten Plätze (die Plätze, an denen Papier liegt)

Abgabe bis Dienstag, den 21. Oktober 2014, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5