Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *($6 \cdot 0,5 = 3$ Punkte)* In den Klausuren sollen in je einer Aufgabe Definitionen und Sätze abgefragt werden. Als Hausaufgaben sind die nicht so sinnvoll, da man sie aus dem Skript abschreiben kann. Aber um eine Idee zu geben, was man in den Klausuren erwarten kann, sind hier 6 typische Beispiele gegeben (die in den Klausuren sicher nicht dran kommen).

   (a) Sei $n \geq 2$ und $\sigma \in S_n$. Definieren Sie den Begriff *Fehlstand von σ*.

   (b) Definieren Sie den Begriff *Ring*. Sie dürfen die Begriffe *Gruppe*, *abelsche Gruppe* und *Verknüpfung* voraussetzen.

   (c) Geben Sie die *Eulersche Formel* an.

   (d) Sei V ein K-Vektorraum. Definieren Sie den Begriff *Untervektorraum von V*.

   (e) Sei V ein K-Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren in V mit $|I| = \infty$. Definieren Sie die Menge $\text{span}(v_i)_{i\in I}$ mit Hilfe von Linearkombinationen, und ohne $\text{span}(v_i)_{i\in J}$ für $J \subset I$ mit $|J| < \infty$ als bekannt vorauszusetzen.

   (f) Sei V ein K-Vektorraum. Wann heißt eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren in V *linear unabhängig*?

2. *($6 \cdot 0,5 = 3$ Punkte)* Kennzeichnen Sie durch ein Kreuz, ob Sie die folgenden Aussagen für wahr oder falsch halten. Begründungen sind nicht nötig.

	Ja	Nein
(i) Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto x(x+1)$ ist injektiv.		
(ii) Es gibt eine nicht abelsche Gruppe mit 6 Elementen.		
(iii) Jeder Körperhomomorphismus ist injektiv.		
(iv) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Körper.		
(v) Der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2^3$ hat 7 Untervektorräume der Dimension 1.		
(vi) Ist $(v_i)_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in eimem Vektorraum V und ist $0 \notin I$ und $v_0 \in V - \text{span}(v_i)_{i\in I}$, so ist auch $(v_j)_{j\in I\cup\{0\}}$ eine linear unabhängige Familie.		

Bitte wenden !!!

3. *(3+2 Punkte)* Bringen Sie die folgenden Matrizen mit dem Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform und bestimmen Sie den Zeilenrang.

   Geben Sie dabei alle Zeilenumformungen an, die Sie durchführen, mit der Notation von Definition/Lemma 4.4 ($Z_I(\lambda, i), Z_{II}(\lambda; i, j), Z_{III}(i, j)$). Geben Sie jeweils nach vollständiger Bearbeitung einer Spalte die Matrix an, die Sie als Zwischenergebnis erhalten. Folgen Sie bei den Matrizen A und B dem Gauß-Algorithmus in Satz 4.7 wörtlich; bei den Matrizen C und D wählen Sie eine Folge von Zeilenumformungen, die Ihnen günstig erscheint.

   (a)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -i & -3 \\ i & -3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -15 & 100 & -1096 \\ 1 & 5 & -33 & 365 \end{pmatrix}.$$

   (b) Die folgende Matrix ist über dem Körper $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (mit den Verknüpfungen $+_5$ und $\cdot_5$) definiert, so daß alle Berechnungen des Gauß-Algorithmus in diesem Körper ausgeführt werden müssen. In Ihren Rechnungen sollen auch nur die Zahlen $0, 1, 2, 3, 4$ stehen.

$$D := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. *(5 Punkte)* Berechnen Sie alle möglichen Produkte $M_i \cdot M_j$ der folgenden Matrizen:

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M_4 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_5 := \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad M_6 := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Abgabe bis Dienstag, den 14. Oktober 2014, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5