

## Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

### 1. (1+4 Punkte)

- (a) Die *Ordnung* einer zyklischen Permutation  $\varphi = (a_1 \dots a_k)$  ist  $k$ .  
 Seien  $\sigma_1, \dots, \sigma_b \in S_n$  ( $n \geq 2, b \geq 1$ ) zyklische Permutationen mit den Ordnungen  $k_1, \dots, k_b$ , und sei

$$\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_b.$$

Leiten Sie aus dem Satz 1.13 der Vorlesung eine Formel ab, die  $\text{sign}(\sigma)$  mit Hilfe der Ordnungen  $k_1, \dots, k_b$  ausdrückt.

- (b) Schreiben Sie die folgenden Permutationen  $\psi_1, \dots, \psi_5 \in S_8$  als Produkte zyklischer Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern und bestimmen Sie mit Hilfe von (a)  $\text{sign}(\psi_j)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ .

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 3 & 7 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\psi_3 = (1\ 3\ 5)(2\ 5\ 4\ 3)(7\ 8),$$

$$\psi_4 = (1\ 2\ 3\ 4)(4\ 5\ 6)(6\ 7\ 8).$$

### 2. (1+2+1 Punkte)

- (a) Neben  $\text{id}$  gibt es in  $S_4$  vier Typen von Produkten von Zykeln mit disjunkten Trägern. Einer ist  $(ab)(cd)$ , und wegen Aufgabe 1 (a) oder Satz 1.13 ist das Signum bei diesem Typ  $+1$ . Geben Sie die anderen drei Typen und jeweils das Signum an.
- (b) Schreiben Sie die 24 Elemente der Gruppe  $S_4$  auf, und zwar bis auf das neutrale Element  $\text{id} \in S_4$  alle als Produkte zyklischer Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern. Geben Sie jeweils das Signum an.
- (c) Sei  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$ . Vervollständigen Sie die folgende Tabelle.

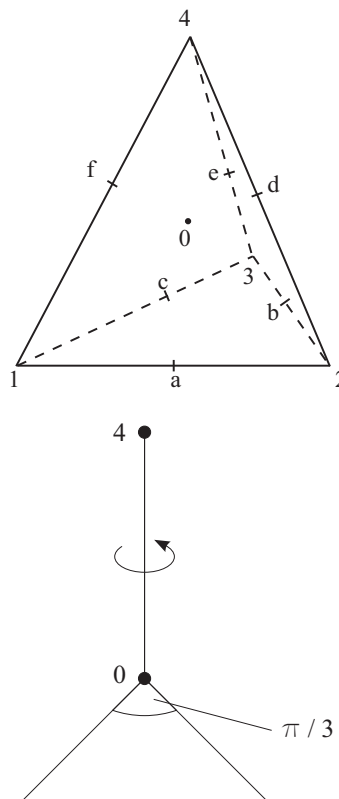
$(i, j)$	$(\sigma(i), \sigma(j))$	Fehlstand
(1, 2)	(3, 2)	ja
(1, 3)		
(1, 4)		
(1, 5)		
(2, 3)		
(2, 4)		
(2, 5)		
(3, 4)		
(3, 5)		
(4, 5)		

3. (3 Punkte)

Diese Aufgabe setzt die richtige Bearbeitung der Aufgabe 2 (b) voraus, denn hier sollen die Elemente der Gruppe  $A_4 := \{\sigma \in S_4 \mid \text{sign}(\sigma) = +1\}$  geometrisch realisiert werden.

$T$  sei ein gleichseitiges Tetraeder im  $\mathbb{R}^3$  mit Mittelpunkt  $0$ , Ecken  $1, 2, 3, 4$  und Kantenmittelpunkten  $a, b, c, d, e, f$  wie in der Skizze.

Einige Fakten (die Sie hier nicht beweisen müssen): Jede Drehung von  $T$  gibt eine Bijektion der Eckenmenge  $\{1, 2, 3, 4\}$  auf sich; diese Bijektion ist in  $A_4$ . Alle Elemente von  $A_4$  werden so realisiert.



Achtung: Um eine Drehung zu charakterisieren, braucht man eine orientierte Drehachse (nur beim Drehwinkel  $\pi$  ist die Orientierung egal) und einen Drehwinkel. Zum Beispiel geben die Achse  $\overrightarrow{04}$  und der Winkel  $\frac{\pi}{3}$  die folgendermaßen skizzierte Drehung.

Hier ist der Beginn einer Tabelle, die beschreiben soll, welche Drehung des Tetraeders welche Permutation in  $A_4$  realisiert. Ergänzen Sie 10 Zeilen mit Drehungen und Permutationen. Die Tabelle alleine reicht. Begründungen sind nicht nötig.

Drehachse	&	Winkel	Permutation in $A_4$
beliebige Achse	&	0	$\text{id}_{\{1,2,3,4\}}$
$\overrightarrow{04}$	&	$\frac{2\pi}{3}$	(123)
$\vdots$	&	$\vdots$	$\vdots$

4. (2+2 Punkte)

(a) Sei  $G$  eine Gruppe. Für ein  $g \in G$  sei  $\phi_g: G \rightarrow G$  definiert durch  $\phi_g(h) := ghg^{-1}$ . Zeigen Sie, daß  $\phi_g$  ein Gruppenisomorphismus ist.

(b) Sei  $G$  eine Gruppe. Das Paar  $(\text{Bij}(G, G), \circ)$  ist nach Satz 1.5 eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$G \rightarrow \text{Bij}(G, G), \quad a \mapsto l_a = (\text{Linksmultiplikation mit } a)$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Bemerkung: Teil (b) zeigt, dass jede endliche Gruppe isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe ist.

**Abgabe bis Dienstag, den 16. September 2014, um 10:05 Uhr im Kasten Ihrer Gruppe im Eingangsbereich des C-Teils des Gebäudes in A5**