Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling

Blatt 3
21.03.2014

Übungsaufgaben zur Spieltheorie 2

1. *(2+3 Punkte)* (Das *Roommate Problem*, ein Beispiel von Gale und Shapley) Sei A eine endliche nichtleere Menge und $>_p$ für jedes $p \in A$ eine (vollständige transitive strikte) Ordnung auf A. Natürlich kann $>_p$ wie bei zweiseitigen Märkten durch eine Präferenzliste $P(p)$ kodiert werden.

   (a) Definieren Sie ein *Matching* in dieser Situation, wann es *individuell rational ist*, was ein *blockierendes Paar* ist und wann ein Matching *stabil* ist. Singles sind zugelassen.

   (b) Zeigen Sie, dass bei folgendem Paar $(A, (>_p)_{p\in A})$ jedes Matching individuell rational ist, aber kein Matching stabil ist.

$$\begin{aligned} A &= \{a, b, c, d\}, \\ P(a) &= (b, c, d, a), \\ P(b) &= (c, a, d, b), \\ P(c) &= (a, b, d, c), \\ P(d) &= (x, y, z, d) \quad \text{mit } \{x, y, z\} = \{a, b, c\}. \end{aligned}$$

2. *(2+3 Punkte)* Gegeben sind 2 Firmen F_1 und F_2 und 3 Arbeiter w_1, w_2 und w_3. Jeder Arbeiter kann höchstens bei einer Firma arbeiten und hat Präferenzen. Er möchte lieber arbeiten als nicht zu arbeiten. Jede Firma kann 0, 1, 2 oder alle 3 Arbeiter einstellen. Sie hat Präferenzen, welche Teilmengen von Arbeitern sie wie gern einstellt. Manche Teilmenge von Arbeitern möchte sie weniger gern einstellen als gar keinen, zum Beispiel alle 3 Arbeiter. Folgende Tabelle gibt die Präferenzen der Arbeiter und der Firmen, bei den Firmen nur bis zur leeren Menge (daher tritt die Menge aller 3 Arbeiter nicht auf).

$$\begin{aligned} P(w_1) &= (F_2, F_1, \emptyset), \\ P(w_2) &= (F_2, F_1, \emptyset), \\ P(w_3) &= (F_1, F_2, \emptyset), \\ P(F_1) &= (\{w_1, w_3\}, \{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1\}, \{w_2\}, \emptyset), \\ P(F_2) &= (\{w_1, w_3\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1, w_2\}, \{w_3\}, \{w_1\}, \{w_2\}, \emptyset). \end{aligned}$$

   Ein *Matching* ist hier eine Abbildung $\mu : W \to F \cup \{\emptyset\}$, bei $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ und $F = \{F_1, F_2\}$. Ein Matching ist *individuell rational*, falls gilt

$$\{w \mid \mu(w) = F_1\} >_{F_1} \emptyset, \quad \{w \mid \mu(w) = F_2\} >_{F_2} \emptyset.$$

Bitte wenden !!!

Ein Paar (C, F) mit $C \subset \mathcal{P}(W)$ ist ein blockierendes Paar, falls 3 Eigenschaften erfüllt sind,

$$(i)\ C >_F \{w \mid \mu(w) \in F\}, \qquad (ii)\ \exists\ w \in C \text{ mit } F \neq \mu(w), \qquad \text{und}$$
$$(iii)\ \forall\ w \in C \text{ mit } F \neq \mu(w) \qquad \text{gilt } F >_w \mu(w).$$

Ein Matching ist *stabil*, wenn es individuell rational ist und kein blockierendes Paar hat.

(a) Listen Sie alle individuell rationalen Matchings auf, bei denen alle Arbeiter eine Anstellung gefunden haben.

(b) Listen Sie für alle diese Matchings alle blockierenden Paare auf und zeigen Sie, dass keines dieser Matchings stabil ist.

3. *(3 Punkte)* Im Beispiel 3.4 der Vorlesung war der folgende Matching Markt betrachtet worden.

$$\begin{aligned} M &= (m_1, m_2, m_3), & W &= (w_1, w_2, w_3), \\ P(m_1) &= (w_2, w_1, w_3, m_1), & P(w_1) &= (m_1, m_3, m_2, w_1), \\ P(m_2) &= (w_1, w_3, w_2, m_2), & P(w_2) &= (m_3, m_1, m_2, w_2), \\ P(m_3) &= (w_1, w_2, w_3, m_3), & P(w_3) &= (m_1, m_3, m_2, w_3). \end{aligned}$$

Führen Sie hier den Gale-Shapley-Algorithmus mit den Frauen als Antragstellern durch und bestimmen Sie so μ_W.

4. *(3+2 Punkte)* Der folgende Matching Markt unterscheidet sich nur in der Präferenzliste $P(w_1)$ vom Matching Markt im Beispiel 3.4 der Vorlesung und in der Aufgabe 3, und auch da sind nur die Männer m_2 und m_3 vertauscht.

$$\begin{aligned} M &= (m_1, m_2, m_3), & W &= (w_1, w_2, w_3), \\ P(m_1) &= (w_2, w_1, w_3, m_1), & P(w_1) &= (m_1, m_2, m_3, w_1), \\ P(m_2) &= (w_1, w_3, w_2, m_2), & P(w_2) &= (m_3, m_1, m_2, w_2), \\ P(m_3) &= (w_1, w_2, w_3, m_3), & P(w_3) &= (m_1, m_3, m_2, w_3). \end{aligned}$$

Führen Sie hier den Gale-Shapley-Algorithmus mit den Männern als Antragstellern durch und bestimmen Sie so μ_M. Führen Sie hier auch den Gale-Shapley-Algorithmus mit den Frauen als Antragstellern durch und bestimmen Sie so μ_W.

5. *(5 Punkte)* Bestimmen Sie im Matching Markt von Aufgabe 4 für jedes der 6 Matchings ohne Singles alle blockierenden Paare und erstellen sie das Diagramm, das analog zum Diagramm in Beispiel 3.4 der Vorlesung ist, und das zeigt, wie man von einem Matching μ mit einem blockierenden Paar (m, w) zu einem anderen Matching übergeht, wenn man m mit w und $\mu(w)$ mit $\mu(m)$ verheiratet.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Prüfungsmodalitäten, Literatur) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/14_FSS_spiel.html`

zu finden.

Vorrechnen von Musterlösungen zu Blatt 3 in der Übung am 27.03.2014