2. Klausur zur Geometrie im FSS 2014

Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 60 Minuten. Es dürfen weder eigene Aufzeichnungen noch Bücher und auch keine Taschenrechner verwendet werden. Insgesamt kann man 24 Punkte erreichen.

Bitte schreiben Sie Namen und Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, auf dem sie nicht schon vorgedruckt sind.

Bitte lassen Sie zwischen Ihren Lösungen der Aufgaben ausreichend Platz.

Die Aufgaben 1 bis 4 sollten weniger als die Hälfte der Zeit in Anspruch nehmen, die Aufgaben 5 bis 8 mehr. Diese Aufgabenstellung hat (inklusive dieser Deckseite) 4 Seiten.

1. *(1+1 Punkte)* Geben Sie je eine Formel für das Vektorprodukt $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ zu $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3) \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ und für das Spatprodukt $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}^t$ zu $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3) \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ an.

2. *(4 Punkte)* Geben Sie 4 verschiedene Bedingungen dafür an, dass 2 Dreiecke kongruent sind. Bei den Bedingungen soll man nichts weglassen dürfen. Sie sollen als Gleichheit von gewissen Längen oder Winkeln formuliert sein. Machen Sie ohne Kommentar zu jeder Bedingung eine kleine, aber aussagekräftige Skizze.

3. *(3 Punkte)* Hier wird der $\mathbb{R}^3$ mit dem Spaltenvektorraum $M(3\times 1, \mathbb{R})$ identifiziert. Dann operieren Matrizen in $M(3\times 3, \mathbb{R})$ durch Linksmultiplikation auf $\mathbb{R}^3$. Dann ist

$$SO(3) = \{A \in SL(3, \mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}\}$$

die Gruppe der Drehungen des $\mathbb{R}^3$ mit Drehachsen durch 0. Außer bei $\mathrm{id} = \mathbf{1}_3$ sind die Drehachsen genau die Eigenräume mit Eigenwert 1 der Drehungen.

Die 5 Platonischen Körper werden so in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet, dass ihr Mittelpunkt der Nullpunkt ist. Dann ist für jeden Platonischen Körper die Gruppe der Drehungen, die ihn auf sich abbilden (d.h. die ihn *invariant* lassen), eine endliche Untergruppe von $SO(3)$.

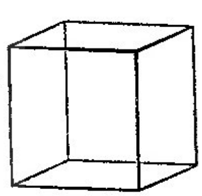
Die folgende Tabelle gibt Informationen über die (endliche) Gruppe $\mathcal{O}$ der „orientierungserhaltenden Symmetrien“ des Würfels, d.h. der Elemente von $SO(3)$, die einen Würfel im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt in 0 auf sich abbilden.

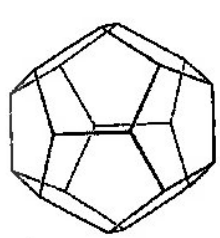
$X :=$ Anzahl der Drehachsen eines Typs,
$Y :=$ Anzahl der Drehungen um Drehachsen eines Typs,

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
–	–	0	(id :) 1
3	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$	$3 \cdot 3 = 9$
6	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	$6 \cdot 1 = 6$
4	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$

$\Rightarrow |\mathcal{O}| = 1 + 9 + 6 + 8 = 24.$

Machen Sie eine analoge Tabelle für die Gruppe $\mathcal{I}$ der orientierungserhaltenden Symmetrien eines Dodekaeders und bestimmen Sie $|\mathcal{I}|$.





4. *(2 Punkte)* Kopieren Sie die folgende Tabelle auf ein Lösungsblatt und tragen Sie in der 2. Spalte in jeder der 4 Zeilen *ja, schwer* oder *ja, leicht* oder *nein* ein. Tragen Sie in der 3. Spalte in jeder der 4 Zeilen ein Minuszeichen oder *Inkreis* oder *Umkreis* ein. Die Tabelle soll danach stimmen. Begründungen sind nicht nötig.

Satz vom ...	Beweis mit dem Satz von Ceva?	Inkreis? Umkreis?
Winkelhalbierendenschnittpunkt		
Seitenhalbierendenschnittpunkt		
Höhenschnittpunkt		
Mittelsenkrechtenschnittpunkt		

5. *(1+1+1 Punkte)* Die Menge der Punkte der hyperbolischen Ebene im Scheibenmodell ist das Innere des Einheitskreises, $\mathbb{D}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

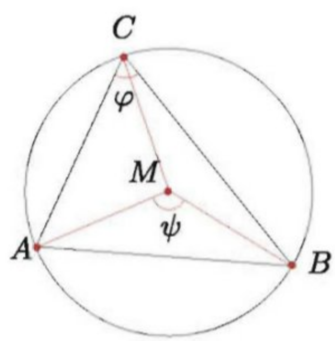
   (a) Geben Sie die Definition einer hyperbolischen Geraden im Scheibenmodell der hyperbolischen Ebene an.

   (b) Machen Sie eine Skizze, die folgendes enthält: den Rand S^1 des Scheibenmodells der hyperbolischen Ebene; eine hyperbolische Gerade G; einen Punkt $p \notin G$ in der Scheibe $\mathbb{D}^2$; die Familie der zu G parallelen hyperbolischen Geraden durch p (diese Familie können Sie natürlich nur andeuten).

   (c) Geben Sie die Formel an, die bei einem hyperbolischen Dreieck Δ seine Fläche und die Summe der Innenwinkel verbindet.

6. *(2+1 Punkte)*

   (a) Beweisen Sie den **Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel:**
   Sei $\Delta(A, B, C)$ ein Dreieck mit den Ecken auf einem Kreis. Ist $\varphi = \measuredangle(ACB)$ der Umfangswinkel über der Sehne AB und $\psi = \measuredangle(AMB)$ der Mittelpunktswinkel über der gleichen Sehne, so gilt $\psi = 2\varphi$.



   (b) Sind die Umfangswinkel auf der gleichen Seite einer Sehne in einem Kreis alle gleich groß? Falls ja, bitte eine kurze Begründung. Falls nein, bitte ein Gegenbeispiel.

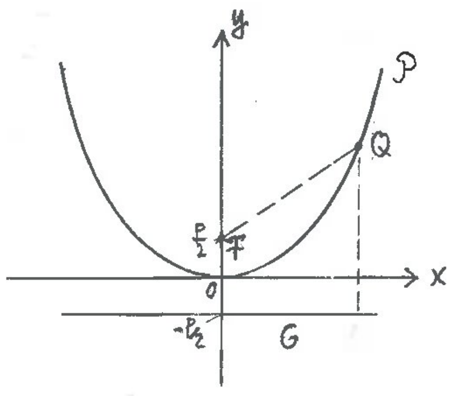
7. *(2+2 Punkte)*

   (a) Listen Sie die Namen aller 6 Typen von Kegelschnitten auf.

   (b) Die Parabel $\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = \frac{x^2}{2p}\}$ für ein $p \in \mathbb{R}_{>0}$ hat den Brennpunkt $F = (0, \frac{p}{2})$ und die Brenngerade $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = -\frac{p}{2}\}$.
   Geben Sie eine Parametrisierung der Parabel $\mathcal{P}$ an. Und zeigen Sie für jeden Punkt $Q \in \mathcal{P}$ auf der Parabel

$$d(Q,F) = d(Q,G).$$

   Hinweis: Das ist äquivalent zu $d(Q,F)^2 = d(Q,G)^2$.



8. *(3 Punkte)* Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$ eine C^∞-Kurve in der hyperbolischen Ebene. Ihre Länge ist

$$L(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))}\, dt.$$

Diese Formel brauchen Sie hier nicht zu beweisen.

γ ist eine *Geodätische* von $z_1 := \gamma(a)$ nach $z_2 := \gamma(b)$, falls sie unter allen Kurven von z_1 nach z_2 kürzeste Länge hat.

Im Fall von $z_1 = i, z_2 = r \cdot i$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>1}$ folgt aus der Formel oben relativ leicht, dass genau die Kurven γ von z_1 nach z_2 mit

$$\begin{aligned} \Re(\gamma)(t) &= 0 \ \forall\, t, \ \text{also Bild}(\gamma) = \text{ Strecke von } i \text{ nach } r \cdot i \\ \text{und } \Im(\gamma)'(t) &> 0 \ \forall\, t \end{aligned}$$

die kürzest mögliche Länge $\log(r)$ haben. Also ist die *Geodätische* von i nach $r \cdot i$ die Strecke von i nach $r \cdot i$, mit irgendeiner Parametrisierung γ mit $\Im(\gamma)'(t) > 0 \,\forall\, t$.

Leiten Sie daraus und aus Eigenschaften der Gruppe $PSL(2,\mathbb{R})$ der gebrochen linearen Transformationen, die $\mathbb{H}^2$ auf $\mathbb{H}^2$ abbilden, ab, dass für beliebige Punkte $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ mit $z_1 \neq z_2$ die *Geodätische* von z_1 nach z_2 das Kurvenstück zwischen z_1 und z_2 der (eindeutigen) hyperbolischen Geraden durch z_1 und z_2 ist.

Viel Erfolg !