Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling

2. Klausur
26.08.2014

Lösungen zur 2. Klausur zur Geometrie im FSS 2014

1. *(1+1 Punkte)*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right), \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1). \\
(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}^t &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.
\end{aligned}$$

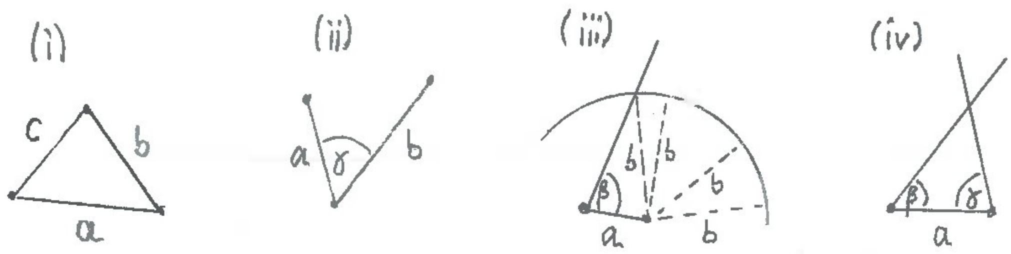
2. *(4 Punkte)* Zwei Dreiecke sind kongruent, falls eine der folgenden 4 Bedingungen erfüllt ist.

   (i) Die Längen ihrer 3 Seiten stimmen paarweise überein.

   (ii) Die Längen zweier Seiten und der davon eingeschlossene Winkel stimmen überein (SWS-Satz).

   (iii) Die Längen zweier Seiten und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel stimmen überein.

   (iv) Die Länge einer Seite und die beiden daran anliegenden Winkel stimmen überein (WSW-Satz).



3. *(3 Punkte)*

   $X :=$ Anzahl der Drehachsen eines Typs,

   $Y :=$ Anzahl der Drehungen um Drehachsen eines Typs,

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
$-$	$-$	0	(id :) 1
6	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{2}{5}\pi,\ \frac{4}{5}\pi,\ \frac{6}{5}\pi,\ \frac{8}{5}\pi$	$6 \cdot 4 = 24$
15	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	$15 \cdot 1 = 15$
10	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$	$10 \cdot 2 = 20$

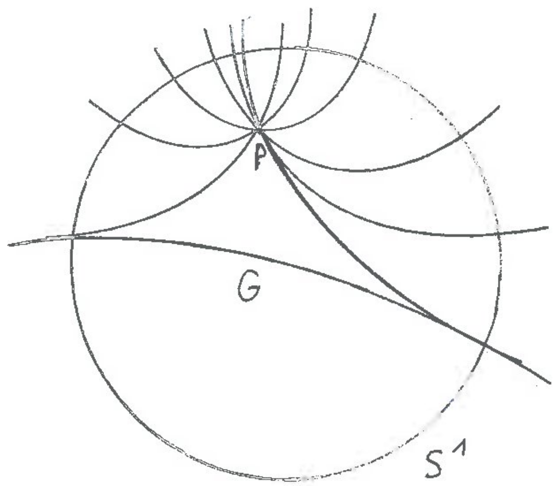
$\Rightarrow |\mathcal{I}| = 1 + 24 + 15 + 20 = 60.$

4. *(2 Punkte)*

Satz vom ...	Beweis mit dem Satz von Ceva?	Inkreis? Umkreis?
Winkelhalbierendenschnittpunkt	nein	Inkreis
Seitenhalbierendenschnittpunkt	ja, leicht	-
Höhenschnittpunkt	ja, schwer	-
Mittelsenkrechtenschnittpunkt	nein	Umkreis

5. *(1+1+1 Punkte)*

   (a) Eine hyperbolische Gerade im Scheibenmodell $\mathbb{D}^2$ der hyperbolischen Ebene ist der in $\mathbb{D}^2$ liegende Teil eines zum Rand S^1 von $\mathbb{D}^2$ orthogonalen verallgemeinerten Kreises.



   (b)

   (c)

$$\text{Fläche}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

6. *(2+1 Punkte)*

   (a) Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks ist π. Daher ist

$$\begin{aligned} \psi &= \pi - (\measuredangle(BAM) + \measuredangle(MBA)) \\ &= \measuredangle(MAC) + \varphi + \measuredangle(CBM). \end{aligned}$$

   Weil aber das Dreieck $\Delta(AMC)$ und das Dreieck $\Delta(CMB)$ gleichschenklig sind, genauer, weil $|MA| = |MC|$ und $|MC| = |MB|$ gilt, ist

$$\measuredangle(MAC) = \measuredangle(ACM) \text{ und } \measuredangle(CBM) = \measuredangle(MCB).$$

   Die Summe dieser beiden Winkel ist $\measuredangle(ACB) = \varphi$. Daher ist die rechte Seite oben gleich 2φ. Daraus folgt $\psi = 2\varphi$.

   (b) Ja. Wegen (a) sind die Umfangswinkel auf der gleichen Seite der Sehne AB des Kreises in (a) alle gleich zu $\frac{1}{2}\psi$, und ψ ist von der Wahl des Punktes C auf dem Kreis, an dem der Umfangswinkel anliegt, unabhängig.

7. *(2+2 Punkte)*

   (a) Ellipse, Parabel, Hyperbel, Punkt, zwei sich schneidende Geraden, eine doppelte Gerade.

   (b) Eine Parametrisierung der Parabel $\mathcal{P}$ ist

$$\mathcal{P} = \{(t, \frac{t^2}{2p}) \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

   Für einen Punkt $Q = (t, \frac{t^2}{2p}) \in \mathcal{P}$ gilt

$$\begin{aligned} d(Q,F)^2 &= t^2 + (\frac{t^2}{2p} - \frac{p}{2})^2 = t^2 + \frac{t^4}{4p^2} - \frac{t^2}{2} + \frac{p^2}{4} \\ &= \frac{t^4}{4p^2} + \frac{t^2}{2} + \frac{p^2}{4} = (\frac{t^2}{2p} + \frac{p}{2})^2 = d(Q,G)^2. \end{aligned}$$

8. *(3 Punkte)* Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ mit $z_1 \neq z_2$. Sei $\mathcal{G}$ die eindeutige hyperbolische Gerade durch z_1 und z_2. Nach einem Satz der Vorlesung gibt es eine gebrochen lineare Transformation $f \in PSL(2,\mathbb{R})$ mit $f(z_1) = i,\ f(z_2) = r \cdot i$ für ein $r > 1$. Die Abbildung f ist eine Isometrie von $\mathbb{H}^2$ auf sich. Daher gilt:

$$\begin{aligned} & \{\text{Geodätische von } z_1 \text{ nach } z_2\} \\ = \ & f^{-1}(\{\text{Geodätische von } i \text{ nach } r \cdot i\}) \\ = \ & f^{-1}(\text{nur die Strecke zwischen } i \text{ und } r \cdot i) \\ = \ & (\text{nur das Stück zwischen } z_1 \text{ und } z_2 \text{ der hyperbolischen Geraden } \mathcal{G}). \end{aligned}$$

   Die letzte Gleichung benutzt erstens, dass f^{-1} den Rand $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$ auf sich abbildet, zweitens, dass f^{-1} Winkel erhält, und drittens, dass f^{-1} verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise abbildet. Insbesondere ist $i \cdot \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein verallgemeinerte Kreis und orthogonal zu $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Daher ist auch das Bild $f^{-1}(i \cdot \mathbb{R} \cup \{\infty\})$ ein verallgemeinerter Kreis und orthogonal zu $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Daher ist sein Teil in $\mathbb{H}^2$ die hyperbolische Gerade $\mathcal{G}$.