Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling

1. Klausur zur Geometrie im FSS 2014

Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 60 Minuten. Es dürfen weder eigene Aufzeichnungen noch Bücher und auch keine Taschenrechner verwendet werden. Insgesamt kann man 24 Punkte erreichen.

Bitte schreiben Sie Namen und Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, auf dem sie nicht schon vorgedruckt sind.

Bitte lassen Sie zwischen Ihren Lösungen der Aufgaben ausreichend Platz.

Die Aufgaben 1 bis 4 sollten weniger als die Hälfte der Zeit in Anspruch nehmen, die Aufgaben 5 bis 8 mehr. Diese Aufgabenstellung hat (inklusive dieser Deckseite) 4 Seiten.

1. *(1+1 Punkte)*

   (a) Machen Sie eine Skizze eines Dreiecks mit Ecken A, B, C, Seiten(längen) a, b, c und Winkeln α, β, γ. Und formulieren Sie eine der drei Gleichungen des Kosinussatzes.

   (b) Formulieren Sie den Sinussatz.

2. *(3 Punkte)* Ein *Polytop* ist ein Durchschnitt im $\mathbb{R}^3$ von endlich vielen Halbräumen, sofern dieser Durchschnitt beschränkt ist. Dann ist

$$\begin{array}{rrcl} & e & := & \text{die Anzahl der Ecken des Polytops,} \\ \text{für } s \in \mathbb{N}_{\geq 3} & e_s & := & \text{die Anzahl der Ecken des Polytops, von denen } s \text{ Kanten ausgehen,} \\ & k & := & \text{die Anzahl der Kanten des Polytops,} \\ & f & := & \text{die Anzahl der Polygonflächen des Polytops,} \\ \text{für } t \in \mathbb{N}_{\geq 3} & f_t & := & \text{die Anzahl der Polygonflächen des Polytops, die } t \text{ Ecken haben.} \end{array}$$

Die 5 platonischen Körper sind seit über 2000 Jahren bekannt. Jeder sollte sie kennen. Kopieren Sie die folgende Tabelle auf ein Lösungsblatt und füllen Sie sie aus. Es gibt jeweils nur ein s mit $e_s \neq 0$ und nur ein t mit $f_t \neq 0$.

s mit $e_s \neq 0$	t mit $f_t \neq 0$	$e = e_s$	k	$f = f_t$	
					Tetraeder
					Würfel = Hexaeder
					Oktaeder
					Dodekaeder
					Ikosaeder

3. *(1+2 Punkte)*

   (a) Geben Sie die Formel an, die bei einem hyperbolischen Dreieck Δ seine Fläche und die Summe der Innenwinkel verbindet.

   (b) Machen Sie 2 Skizzen eines Kreises, der der Rand des Scheibenmodells der hyperbolischen Ebene sein soll. Tragen Sie in einer Skizze ein (echtes) hyperbolisches Dreieck Δ_1 (echt: alle Innenwinkel > 0) und die 3 hyperbolischen Geraden ein, von denen seine Seiten Stücke sind. Tragen Sie in der zweiten Skizze ein asymptotisches Dreieck Δ_2 mit Innenwinkeln $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0$ und die 3 hyperbolischen Geraden ein, von denen seine Seiten Stücke sind.

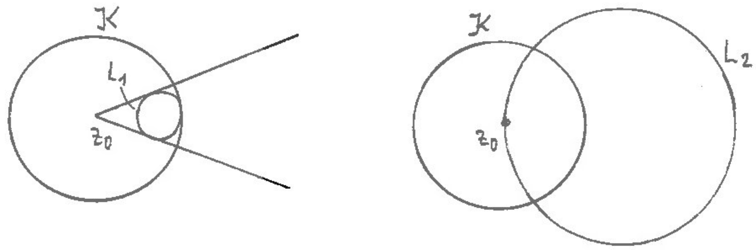
4. *(1+2 Punkte)*

   (a) Sei $\mathcal{K}$ ein Kreis in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt z_0 und Radius r. Die Inversion $S_{\mathcal{K}} : \mathbb{C} - \{z_0\} \to \mathbb{C} - \{z_0\}$ am Kreis $\mathcal{K}$ bildet jeden Punkt $z \in \mathbb{C} - \{z_0\}$ auf einen Punkt z^* ab. z^* ist dadurch bestimmt, dass z und z^* auf der gleichen Halbgeraden liegen, die in z_0 anfängt, und dass sie eine bestimmte Gleichung erfüllen.

   Geben Sie die Gleichung an.

(b) Die folgenden beiden Skizzen zeigen jeweils $\mathcal{K}$ und einen zweiten Kreis L_1 bzw. L_2. Die erste Skizze zeigt auch 2 Halbgeraden.

Kopieren Sie die Skizzen auf ein Lösungsblatt und tragen Sie die (oder aussagekräftige Teile von ihnen) verallgemeinerten Kreise $S_{\mathcal{K}}(L_1)$ bzw. $S_{\mathcal{K}}(L_2)$ ein.

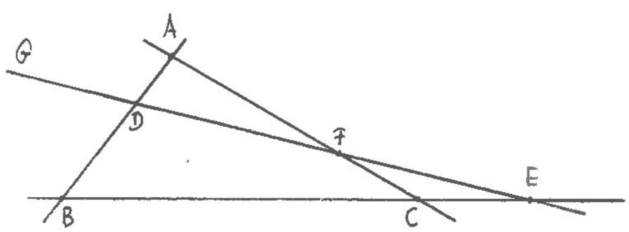


5. *(3 Punkte)* Für ein $\alpha \in (0, 2\pi)$ sei d_α die Drehung des $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt 0 und um den Winkel α. Für ein $v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ sei s_v die Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ mit Spiegelungsachse $\mathbb{R} \cdot v$. Dann ist $s_v \circ d_\alpha$ wieder eine Spiegelung.

   Begründen Sie, warum $s_v \circ d_\alpha$ wieder eine Spiegelung ist, geben Sie eine Formel für ein w mit $s_v \circ d_\alpha = s_w$ an, begründen Sie diese Formel, und machen Sie eine hilfreiche Skizze für ein $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ dazu.

6. *(3 Punkte)* **Erster Teil des Satzes von Menelaos:** *In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ und eine Gerade G mit $G \cap (A \vee B) = \{D\}$, $G \cap (B \vee C) = \{E\}$ und $G \cap (C \vee A) = \{F\}$ und $\{D, E, F\} \cap \{A, B, C\} = \emptyset$ gegeben ($A \vee B$ bezeichnet die Gerade durch die Punkte A und B). Dann gilt*

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1.$$

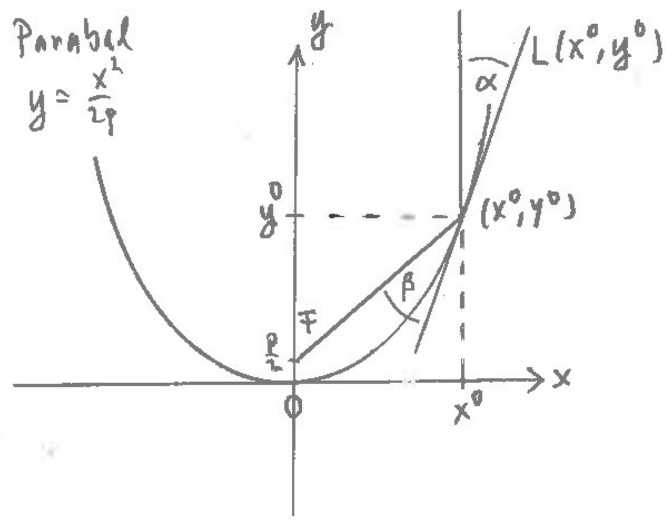


   Beweisen Sie diesen Satz. Kopieren Sie dafür die Skizze auf ein Lösungsblatt und ergänzen Sie sie in sinnvoller Weise.

7. *(3+1 Punkte)*

   (a) Die Parabel $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{x^2}{2p}\}$ für ein $p \in \mathbb{R}_{>0}$ hat den Brennpunkt $F = (0, \frac{p}{2})$. Sei $(x^0, y^0) \in \mathcal{P}$, und sei $L(x^0, y^0)$ die Tangente in (x^0, y^0) an $\mathcal{P}$. Die folgende Skizze zeigt $\mathcal{P}$, (x^0, y^0), $L(x^0, y^0)$, die Strecke von (x^0, y^0) nach F, die senkrechte Halbgerade von (x^0, y^0) nach oben und 2 Winkel α und β.

   Es gilt $\alpha = \beta$. Zeigen Sie dies.



Hinweis: Aus den Additionstheoremen folgt für ein $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\cot(2\gamma) = \frac{1}{2}\cot\gamma - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cot\gamma}.$$

(b) Die Ellipse $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ für $a > b > 0$ hat die Brennpunkte $F_1 = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ und $F_2 = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$. Machen Sie eine Skizze von $\mathcal{E}$ für $a = 2, b = 1$, geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an, tragen Sie F_1, F_2, einen Punkt $(x^0, y^0) \in \mathcal{E} - \{\text{Koordinatenachsen}\}$, die Strecke von F_1 nach (x^0, y^0), die Streche von (x^0, y^0) nach F_2, die Tangente $L(x^0, y^0)$ an $\mathcal{E}$ in (x^0, y^0) und 2 Winkel α und β ein, deren Gleichheit ausdrückt, dass Licht, das in F_1 startet, nach einer Reflektion an $\mathcal{E}$ nach F_2 läuft.

8. *(3 Punkte)* (Hyperbolische Kreise) Sowohl im Poincaré-Modell als auch im Scheibenmodell der hyperbolischen Ebene ist ein hyperbolischer Kreis um einen Punkt z_0 die Menge aller Punkte der hyperbolischen Ebene, die einen festen hyperbolischen Abstand $r \in \mathbb{R}_{>0}$ zu z_0 haben.

   Aus der Symmetrie des Scheibenmodells folgt leicht, dass im Scheibenmodell die hyperbolischen Kreise um den Nullpunkt $z_0 = 0$ genau die euklidischen Kreise mit Mittelpunkt 0 und Radius $R < 1$ sind (das brauchen Sie nicht zu beweisen).

   Leiten Sie daraus und aus Eigenschaften der gebrochen linearen Transformationen ab, dass sowohl im Poincaré-Modell als auch im Scheibenmodell alle hyperbolischen Kreise euklidische Kreise sind. Formulieren Sie dabei klar, welche Eigenschaften der gebrochen linearen Transformationen in $PSL(2, \mathbb{R})$ und welche Eigenschaften der Cayley-Transformation $C \in PSL(2, \mathbb{C})$, die das Scheibenmodell auf das Poincaré-Modell abbildet, gebraucht werden. (Die Cayley-Transformation müssen Sie nicht angeben.)

Viel Erfolg !