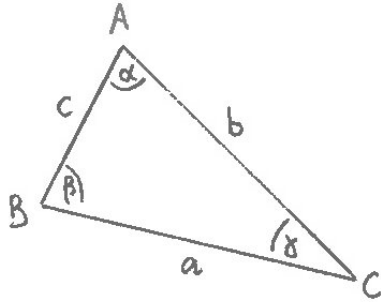


Lösungen zur 1. Klausur zur Geometrie im FSS 2014

1. (1+1 Punkte)

(a)



$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

(b)

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

2. (3 Punkte)

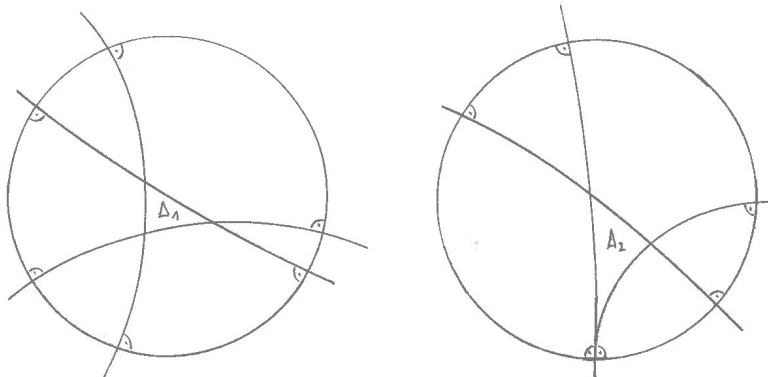
s mit $e_s \neq 0$	t mit $f_t \neq 0$	$e = e_s$	k	$f = f_t$	
3	3	4	6	4	Tetraeder
3	4	8	12	6	Würfel = Hexaeder
4	3	6	12	8	Oktaeder
3	5	20	30	12	Dodekaeder
5	3	12	30	20	Ikosaeder

3. (1+2 Punkte)

(a)

$$\text{Fläche}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

(b)

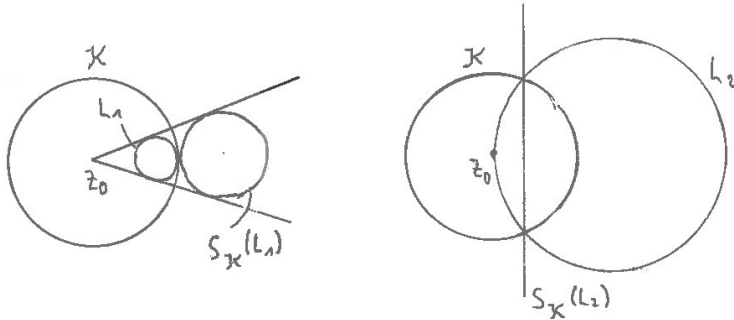


4. (1+2 Punkte)

(a)

$$|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = r^2.$$

(b)

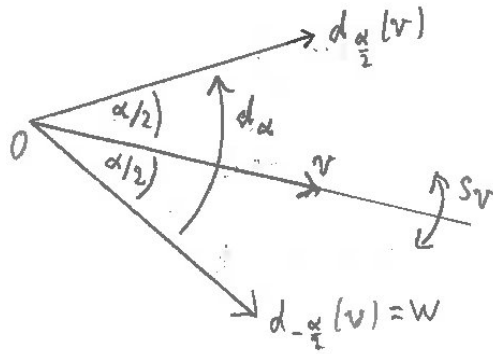


5. (3 Punkte) $s_v \circ d_\alpha$ ist eine Spiegelung, denn

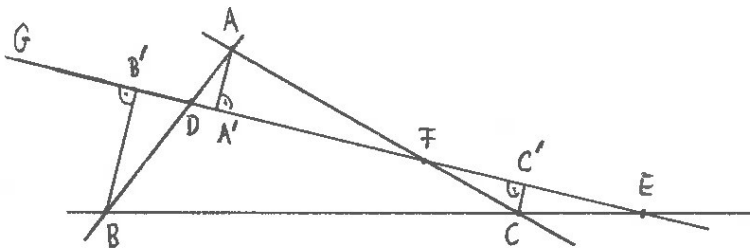
$$\det(s_v \circ d_\alpha) = \det s_v \cdot \det d_\alpha = (-1) \cdot 1 = -1.$$

Die Spiegelungsachse ist $\mathbb{R} \cdot w$ mit $w = d_{-\alpha/2}(v)$, denn dieses w ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von $s_v \circ d_\alpha$:

$$(s_v \circ d_\alpha)(d_{-\alpha/2}(v)) = s_v(d_{\alpha/2}(v)) = d_{-\alpha/2}(v).$$



6. (3 Punkte) A' , B' und C' seien die Fußpunkte auf G der Lote von A , B und C auf G .



3 Anwendungen des (nicht orientierten) Strahlensatzes geben

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}, \quad \frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|BB'|}{|CC'|}, \quad \frac{|CF|}{|FA|} = \frac{|CC'|}{|AA'|}.$$

Also ist

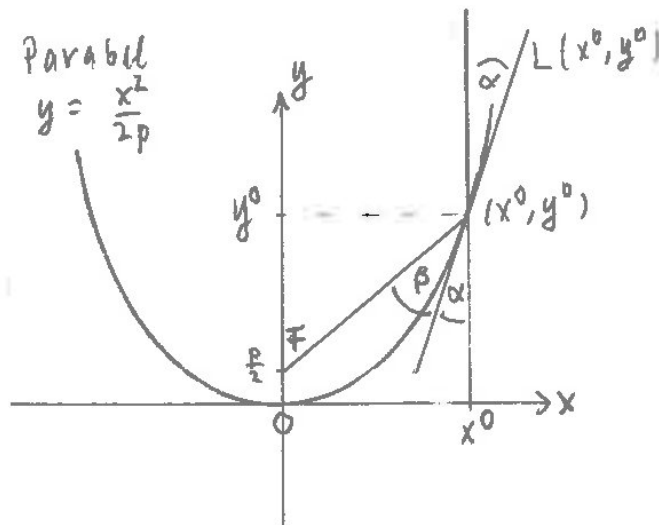
$$\left| \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} \right| = \frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} = \frac{|AA'|}{|BB'|} \cdot \frac{|BB'|}{|CC'|} \cdot \frac{|CC'|}{|AA'|} = 1.$$

Entweder liegen 2 der 3 Punkte auf den Seiten des Dreiecks und der dritte außerhalb, oder alle 3 Punkte liegen außerhalb. Daher sind entweder 2 der 3 Teilungsverhältnisse $\frac{AD}{DB}, \frac{BE}{EC}, \frac{CF}{FA}$ positiv und das dritte ist negativ, oder alle 3 sind negativ. In jedem Fall folgt

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1.$$

7. (3+1 Punkte)

(a)



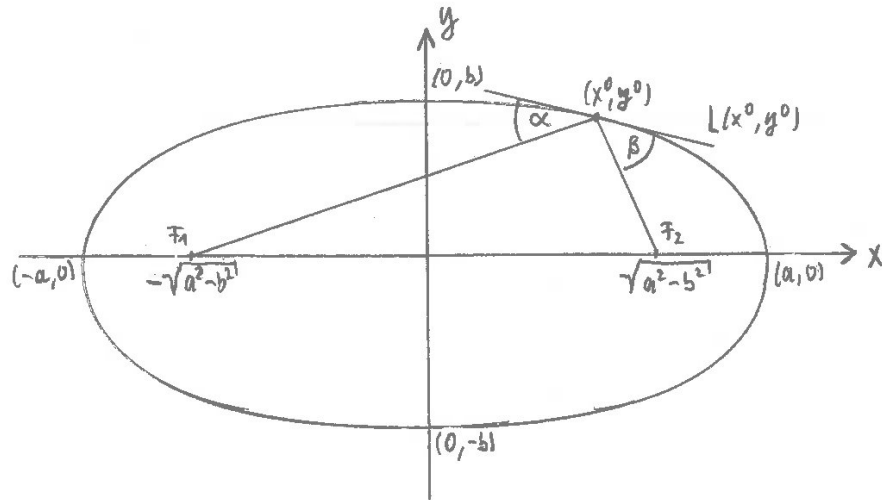
$$\cot \alpha = \text{Steigung von } L(x^0, y^0) = y'(x^0) = \frac{x^0}{p},$$

$$\cot(\alpha + \beta) = \text{Steigung der Strecke von } F \text{ nach } (x^0, y^0) = \frac{y^0 - \frac{p}{2}}{x^0}$$

$$= \frac{\frac{(x^0)^2}{2p} - \frac{p}{2}}{x^0} = \frac{x^0}{2p} - \frac{p}{2x^0} = \frac{1}{2} \cot \alpha - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cot \alpha} = \cot(2\alpha),$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta.$$

(b)



8. (3 Punkte) Wegen $C(0) = i$, und weil C das Scheibenmodell auf das Poincaré-Modell abbildet, bildet C die hyperbolischen Kreise um 0 im Scheibenmodell auf die hyperbolischen Kreise um i im Poincaré-Modell ab.

Weil jede gebrochene lineare Transformation in $PSL(2, \mathbb{C})$, und insbesondere C , verallgemeinerte euklidische Kreise auf verallgemeinerte euklidische Kreise abbildet und weil die hyperbolischen Kreise um 0 im Scheibenmodell auch euklidische Kreise sind, sind die hyperbolischen Kreise um i im Poincaré-Modell verallgemeinerte euklidische Kreise.

Die Elemente von $PSL(2, \mathbb{R})$ sind Isometrien des Poincaré-Modells. Daher bilden sie die hyperbolischen Kreise um i auf hyperbolische Kreise um beliebige Punkte $z \in \mathbb{H}^2$ ab. Wegen $PSL(2, \mathbb{R}) \subset PSL(2, \mathbb{C})$ sind auch diese verallgemeinerte euklidische Kreise.

Weil sie den Rand $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ nicht berühren, sind sie echte euklidische Kreise.

Mit C^{-1} werden sie auf die hyperbolischen Kreise im Scheibenmodell abgebildet. Daher sind auch diese verallgemeinerte euklidische Kreise. Weil sie den Rand der Einheitskreis nicht berühren, sind sie echte euklidische Kreise.