Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling

Probeklausur
03.04.2014

Probeklausur zur Geometrie im FSS 2014

Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 60 Minuten. Es dürfen weder eigene Aufzeichnungen noch Bücher und auch keine Taschenrechner verwendet werden. Insgesamt kann man 24 Punkte erreichen.

Bitte schreiben Sie weder Namen noch Matrikelnummer auf Ihre Lösungsblätter (bei den offiziellen Klausuren werden Sie an dieser Stelle aufgefordert, Namen und Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt zu schreiben, auf dem sie nicht schon vorgedruckt sind).

Bitte lassen Sie zwischen Ihren Lösungen der Aufgaben ausreichend Platz.

Die Tabellen in den Aufgaben 2 und 8 können Sie auf Ihre Lösungsblätter kopieren und dort ausfüllen.

1. *(2 Punkte)* Geben Sie je eine Formel für das Vektorprodukt $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \in M(1\times 3, \mathbb{R})$ zu $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3) \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ und für das Spatprodukt $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}^t$ zu $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3) \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ an.

2. *(3 Punkte)* Tragen Sie in der 2. Spalte der folgenden Tabelle in jeder der 4 Zeilen *ja, schwer* oder *ja, leicht* oder *nein* ein. Tragen Sie in der 3. Spalte in jeder der 4 Zeilen ein Minuszeichen oder *Inkreis* oder *Umkreis* ein. Die Tabelle soll danach stimmen. Begründungen sind nicht nötig.

Satz vom ...	Beweis mit dem Satz von Ceva?	Inkreis? Umkreis?
Winkelhalbierendenschnittpunkt		
Seitenhalbierendenschnittpunkt		
Höhenschnittpunkt		
Mittelsenkrechtenschnittpunkt		

3. *(3 Punkte)* Formulieren und beweisen Sie eine der drei Gleichungen des Kosinussatzes. Machen Sie dazu (auch) eine Skizze eines Dreiecks mit Ecken A, B, C, Seitenvektoren $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ (die Seitenlängen sind dann a, b, c) und Winkeln α, β, γ.

Bitte wenden !!!

4. *(3 Punkte)* Die zehnte Einheitswurzel $\zeta := e^{2\pi i/10}$ erfüllt $0 = \zeta^5+1 = (\zeta+1)(\zeta^4 - \zeta^3+\zeta^2-\zeta+1)$, wegen $\zeta+1 \neq 0$ also auch $0 = \zeta^4-\zeta^3+\zeta^2-\zeta+1$. Und natürlich ist $\zeta+\zeta^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{10}$.

   Leiten Sie daraus eine quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ mit $p,q\in\mathbb{Q}$ ab, die von $2\cos\frac{2\pi}{10}$ erfüllt wird. Rechnen Sie damit $2\cos\frac{2\pi}{10}$ aus.

   Bemerkungen: Wegen dieser Formel kann man das regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruieren. Die Zahl $2\cos\frac{2\pi}{10}$ heißt goldener Schnitt.

5. *(4 Punkte)* Geben Sie die Definition eines *affinen Raums* an.

6. *(2 Punkte)* Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum, und seien $p_0,...,p_n \in \mathcal{A}$ Punkte des affinen Raums. Geben Sie ein Kriterium dafür an, dass die Punkte eine *affine Basis* bilden.

7. *(4 Punkte)* **Satz:** *Sei $\mathcal{K}$ ein Kreis vom Radius r und mit Mittelpunkt M in $\mathbb{R}^2$. Sei $P\in\mathbb{R}^2-\mathcal{K}$, und sei G eine Gerade durch P mit $G\cap\mathcal{K} = \{A,B\}$. Es kann $A=B$ oder $A\neq B$ sein. Dann gilt:*

$$\frac{AP}{BP}\cdot|BP|^2 = |MP|^2 - r^2.$$

   Aus diesem Satz folgen leicht der Sekantensatz (für P außerhalb des Kreises $\mathcal{K}$) und der Sehnensatz (für P innerhalb des Kreises $\mathcal{K}$).

   Machen Sie eine Skizze für den Fall P außerhalb des Kreises $\mathcal{K}$. Beweisen Sie den Satz in diesem Fall durch Vergleich der Winkel $\measuredangle(PAM)$ und $\measuredangle(PBM)$ und Anwendung des Kosinussatzes.

8. *(3 Punkte)* Sei $\mathcal{K}$ ein Kreis in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt M und $S_\mathcal{K}$ die Inversion am Kreis $\mathcal{K}$. Im folgenden sind $M_1,...,M_6$ Mengen von verallgemeinerten Kreisen in $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, die durch $S_\mathcal{K}$ aufeinander abgebildet werden. $\mathrm{Int}\,(L)$ bezeichnet bei einem *echten* Kreis L das Innere des Kreises.

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \{\text{Kreise } L \text{ mit } L\subset \mathrm{Int}\,(\mathcal{K})\},\\
M_2 &:= \{\text{verallgemeinerte Kreise } L \text{ mit } L\cap(\mathrm{Int}\,(\mathcal{K})\cup\mathcal{K}) = \emptyset\},\\
M_3 &:= \{\text{Kreise } L \text{ mit } M\in\mathrm{Int}\,(L)\},\\
M_4 &:= \{\text{Kreise } L \text{ mit } M\notin\mathrm{Int}\,(L)\}\cup\{\text{alle Geraden}\},\\
M_5 &:= \{\text{verallgemeinerte Kreise } L \text{ mit } M\in L\},\\
M_6 &:= \{\text{alle Geraden}\}.
\end{aligned}$$

   Füllen Sie die zweite Zeile der folgenden Tabelle aus. Begründungen sind nicht nötig.

M_i	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
M_j mit $M_j = S_\mathcal{K}(M_i)$						

Viel Erfolg !