Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling

Probeklausur
03.04.2014

Lösungen zur Probeklausur zur Geometrie im FSS 2014

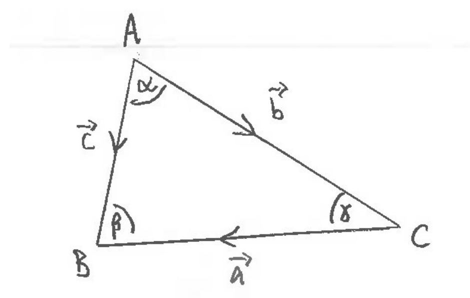
1. *(2 Punkte)*

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right), \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1). \\
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}^{\,t} &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.
\end{aligned}$$

2. *(3 Punkte)*

Satz vom ...	Beweis mit dem Satz von Ceva?	Inkreis? Umkreis?
Winkelhalbierendenschnittpunkt	nein	Inkreis
Seitenhalbierendenschnittpunkt	ja, leicht	-
Höhenschnittpunkt	ja, schwer	-
Mittelsenkrechtenschnittpunkt	nein	Umkreis

3. *(3 Punkte)*



Eine Gleichung des Kosinussatzes:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Beweis: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}, \quad \vec{b} - \vec{c} = -\vec{a}.$

$$\begin{aligned}
a^2 &= |\vec{b} - \vec{c}|^2 = b^2 - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + c^2, \quad \text{also } \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \\
\cos\alpha &= \frac{\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}{bc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.
\end{aligned}$$

4. *(3 Punkte)* Sei $g := 2\cos\frac{2\pi}{10} = \zeta + \zeta^{-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
g^2 &= (\zeta + \zeta^{-1})^2 = \zeta^2 + 2 + \zeta^{-2}, \quad \text{also} \\
g^2 - g - 1 &= \zeta^2 - \zeta + 1 - \zeta^{-1} + \zeta^{-2} = \zeta^{-2}(\zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1) = \zeta^{-2} \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Bitte wenden !!!

Daher ist g eine der beiden Lösungen $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 - 4(-1)}$ der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1$. Wegen $g > 0$ ist es die Lösung

$$g = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

5. *(4 Punkte)* Ein affiner Raum ist ein Tripel $(\mathcal{A}, T(\mathcal{A}), \varphi_{\mathcal{A}})$. Hier ist $\mathcal{A}$ eine nichtleere Menge, $T(\mathcal{A})$ ist ein K-Vektorraum, und

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \to & T(\mathcal{A}) \\ (x,y) & \mapsto & \overrightarrow{xy} \end{array}$$

ist eine Abbildung mit den folgenden zwei Eigenschaften:

$$(i) \quad \forall\, x,y,z \in \mathcal{A} \quad \text{ist} \quad \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}.$$

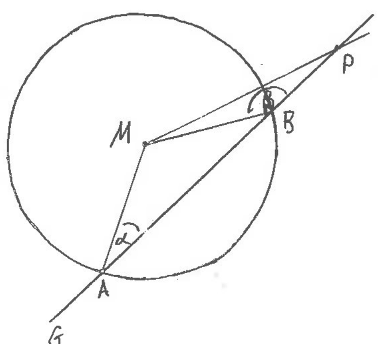
(ii) Für jeden Punkt $p \in \mathcal{A}$ ist die Abbildung

$$\varphi_{\mathcal{A},p} =: \varphi_{\mathcal{A}}(p,.) : \mathcal{A} \to T(\mathcal{A}), \quad x \mapsto \overrightarrow{px},$$

bijektiv.

6. *(2 Punkte)* Die Punkte $p_0, ..., p_n$ bilden eine affine Basis des affinen Raums $\mathcal{A}$, falls die Vektoren $\overrightarrow{p_0p_1}, ..., \overrightarrow{p_0p_n}$ eine Basis des Vektorraums $T(\mathcal{A})$ bilden.

7. *(4 Punkte)*



$$\alpha = \measuredangle(PAM), \quad \beta = \measuredangle(PBM), \qquad \alpha + \beta = \pi, \quad \cos\alpha = -\cos\beta,$$

$$\cos\alpha = \frac{r^2 + |AP|^2 - |MP|^2}{2r \cdot |AP|}, \qquad \cos\beta = \frac{r^2 + |BP|^2 - |MP|^2}{2r \cdot |BP|},$$

$$\begin{aligned} 2r|BP|(r^2 + |AP|^2 - |MP|^2) &= -2r|AP|(r^2 + |BP|^2 - |MP|^2), \\ (|AP| + |BP|)(r^2 + |AP| \cdot |BP| - |MP|^2) &= 0, \\ |AP| \cdot |BP| &= |MP|^2 - r^2. \end{aligned}$$

8. *(3 Punkte)*

M_i	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
M_j mit $M_j = S_{\mathcal{K}}(M_i)$	M_2	M_1	M_3	M_4	M_6	M_5