Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling

Blatt 6
21.05.2014
Mit Korrekturen von Druckfehlern

Übungsaufgaben zur Geometrie

1. *(3+1 Punkte)*

   (a) Bei den Ellipsen hat man 2 Normalformen, die Standard-Normalform
   $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{mit } a>b>0$$
   und die Kegelschnitt-Normalform
   $$y^2+(1-\varepsilon^2)x^2+2p\varepsilon x-p^2=0 \quad \text{mit } \varepsilon\in(0,1), p>0.$$
   Berechnen Sie ε (= die *nummerische Exzentrizität*) und p (= der *Parameter*) aus a und b.

   (b) Dito bei den Hyperbeln mit der Standard-Normalform
   $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{mit } a>0, b>0$$
   und der Kegelschnitt-Normalform
   $$y^2+(1-\varepsilon^2)x^2+2p\varepsilon x-p^2=0 \quad \text{mit } \varepsilon\in(1,+\infty), p>0.$$

   Bemerkung: Bei den Parabeln sind die Normalform $y^2-2px=0$ mit $p>0$ und die Kegelschnitt-Normalform $y^2+2px-p^2$ nah verwandt, hier ist $\varepsilon=1$.

2. *(3+3 Punkte)* Hier wird der $\mathbb{R}^2$ mit dem Spaltenvektorraum $M(2\times 1,\mathbb{R})$ identifiziert. Dann operieren Matrizen in $M(2\times 2,\mathbb{R})$ durch Linksmultiplikation auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist
   $$SO(2)=\{A\in SL(2,\mathbb{R})\,|\,A^t=A^{-1}\}=\left\{\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\,|\,\alpha\in[0,2\pi)\right\}$$
   die Gruppe der Drehungen d_α um Winkel $\alpha\in[0,2\pi)$ und mit Mittelpunkt 0. Und die Gruppe
   $$\begin{aligned}O(2)&=SO(2)\cup SO(2)\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\ &=SO(2)\cup\left\{\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\,|\,\alpha\in[0,2\pi)\right\}\overset{\text{(als Menge)}}{\approx} S^1\cup S^1\end{aligned}$$
   enthält neben den Drehungen auch die Spiegelungen s_v an Geraden $\mathbb{R}\cdot v$ mit $v\in\mathbb{R}^2-\{0\}$. Bei $O(2)$ parametrisiert die eine S^1 die Drehungswinkel der Drehungen, und die andere S^1 parametrisiert die Spiegelungsachsen der Spiegelungen.

   Drehungen und Spiegelungen kommutieren nicht, sondern es gilt die Beziehung
   $$d_\alpha\circ s_v\circ d_\alpha^{-1}=s_{d_\alpha(v)}.$$

(a) Beweisen Sie diese Formel und machen Sie eine Skizze dazu.

(b) Vervollständigen Sie (ohne Beweis) die folgende Tabelle zur Gruppenstruktur von $O(2)$. Der Winkel zwischen w und v soll γ genannt werden (also ist $-\gamma$ der Winkel zwischen v und w).

$\circ$	d_β	s_w
d_α	$d_\alpha \circ d_\beta = d_{\alpha+\beta}$	$d_\alpha \circ s_w = s_{\dots}$
s_v	$s_v \circ d_\beta = s_{\dots}$	$s_v \circ s_w = d_{\dots}$

3. *(3+3 Punkte)* Hier wird der $\mathbb{R}^3$ mit dem Spaltenvektorraum $M(3 \times 1, \mathbb{R})$ identifiziert. Dann operieren Matrizen in $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ durch Linksmultiplikation auf $\mathbb{R}^3$. Dann ist

$$SO(3) = \{A \in SL(3, \mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}\}$$

die Gruppe der Drehungen des $\mathbb{R}^3$ mit Drehachsen durch 0. Außer bei $\mathrm{id} = \mathbf{1}_3$ sind die Drehachsen genau die Eigenräume mit Eigenwert 1 der Drehungen.

Die 5 Platonischen Körper werden so in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet, dass ihr Mittelpunkt der Nullpunkt ist. Dann ist für jeden Platonischen Körper die Gruppe der Drehungen, die ihn auf sich abbilden (d.h. die ihn *invariant* lassen), eine endliche Untergruppe von $SO(3)$.

Die folgende Tabelle gibt Informationen über die (endliche) Gruppe $\mathcal{O}$ der „orientierungserhaltenden Symmetrien" des Würfels, d.h. der Elemente von $SO(3)$, die einen Würfel im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt in 0 auf sich abbilden.

$X :=$ Anzahl der Drehachsen eines Typs,

$Y :=$ Anzahl der Drehungen um Drehachsen eines Typs,

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
–	–	0	(id :) 1
3	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$	$3 \cdot 3 = 9$
6	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	6
4	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$

$\Rightarrow |\mathcal{O}| = 1 + 9 + 6 + 8 = 24.$

(a) Machen Sie eine analoge Tabelle für die Gruppe $\mathcal{T}$ der orientierungserhaltenden Symmetrien eines Tetraeders und bestimmen Sie $|\mathcal{T}|$.

(b) Machen Sie eine analoge Tabelle für die Gruppe $\mathcal{I}$ der orientierungserhaltenden Symmetrien eines Dodekaeders und bestimmen Sie $|\mathcal{I}|$.

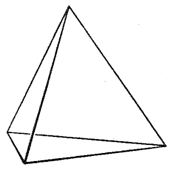
Bemerkung: Es gilt

$$\mathcal{T} \cong A_4, \quad \mathcal{O} \cong S_4, \quad \mathcal{I} \cong A_5.$$

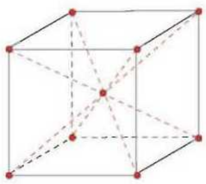
Bei $\mathcal{T}$ werden die 4 Ecken permutiert. Man überprüft leicht, dass die Drehungen genau die geraden Permutationen geben.

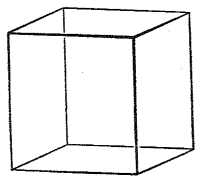
Bei $\mathcal{O}$ muß man die Operation auf den 4 Raumdiagonalen im Würfel ansehen. Jedes Element von $\mathcal{O}$ permutiert diese. Wegen $|\mathcal{O}| = 24 = |S_4|$ wird jede Permutation als Drehung realisiert.

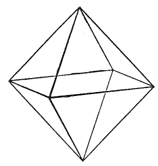
Bei $\mathcal{I}$ muß man zuerst einmal wissen und verstehen, dass es im Dodekaeder genau 5 regelmäßige Würfel gibt, deren Ecken Ecken des Platonischen Körpers sind. Diese werden durch die Drehungen in $\mathcal{I}$ permutiert. Es erfordert aber noch Anstrengung zu sehen, dass genau die geraden Permutationen realisiert werden.



Tetraeder

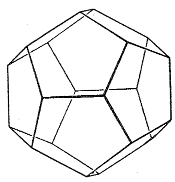


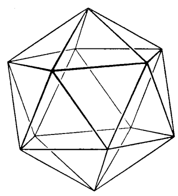




Würfel

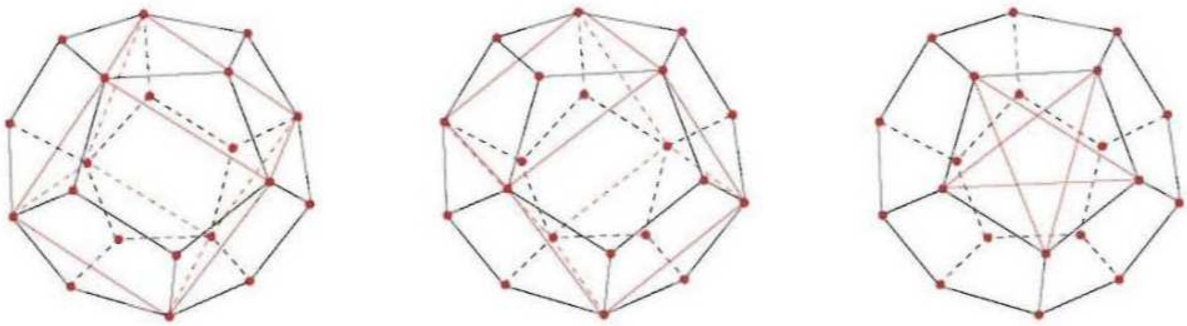
Oktaeder





Dodekaeder

Ikosaeder



Vorrechnen von Musterlösungen zu Blatt 6 in der Übung am 22.05.2014