Übungsaufgaben zur Geometrie

Einige Abschnitte und Teile im Kapitel 4 des Buchs von Agricola und Friedrich werden in den Klausuren zur Vorlesung nicht als bekannt vorausgesetzt (es ist aber nicht ausgeschlossen, dass Teile als unbekannter Stoff in schwerere Aufgaben eingehen). Das sind folgende Abschnitte und Teile.

Der ganze Abschnitt 4.1 und der ganze Abschnitt 4.6.
In Abschnitt 4.2 der Beweis von Satz 5.
In Abschnitt 4.2 Satz 10 (denn der bezieht sich auf Abschnitt 4.1).
In Abschnitt 4.3 Satz 13 und sein Beweis (der im Buch auch nicht ausgeführt wird).
In Abschnitt 4.4 alles außer den Sätzen 17 und 18.
In Abschnitt 4.5 alles ab (inklusive) Satz 22.

1. *(5 Punkte)* Einen *Kegelstumpf* $KS(r_1, r_2, h)$ erhält man aus einem Kegel im $\mathbb{R}^3$ mit Radius r_2 (in der (x, y)-Ebene) und Höhe h_2 (in der z-Richtung), indem man einen kleineren Teilkegel mit Radius $r_1 < r_2$ und Höhe $h_1 < h_2$ (natürlich mit $\frac{r_2}{r_1} = \frac{h_2}{h_1}$) wegläßt. Dann ist $h = h_2 - h_1$. Die Oberfläche des Kegelstumpfs ist
$$2\pi\sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2} \cdot \frac{r_1 + r_2}{2}.$$
Sei nun C in der (y, z)-Ebene eine Kurve ohne Selbstüberschneidung, die durch eine C^∞-Abbildung $(y, z) : [a, b] \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ mit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ parametrisiert ist. Aus dieser Kurve C erhält die Rotationsfläche $F(C)$ mit Parametrisierung
$$F(C) := \{(\sin\varphi \cdot y(t), \cos\varphi \cdot y(t), z(t)) \mid t \in [a, b], y \in [0, 2\pi]\}.$$
Leiten Sie aus der Formel für die Oberfläche eines Kegelstumpfs und mit Hilfe einer Approximation der Kurve C durch einen Polygonzug eine Formel für die Oberfläche der Rotationsfläche $F(C)$ her.

2. *(2+5+2 Punkte)* Ein *Polytop* ist ein Durchschnitt im $\mathbb{R}^3$ von endlich vielen Halbräumen, sofern dieser Durchschnitt beschränkt ist. Dann ist
$$\begin{array}{rrcl} & e & := & \text{die Anzahl der Ecken des Polytops,} \\ \text{für } s \in \mathbb{N}_{\geq 3} & e_s & := & \text{die Anzahl der Ecken des Polytops, von denen } s \text{ Kanten ausgehen,} \\ & k & := & \text{die Anzahl der Kanten des Polytops,} \\ & f & := & \text{die Anzahl der Polygonflächen des Polytops,} \\ \text{für } t \in \mathbb{N}_{\geq 3} & f_t & := & \text{die Anzahl der Polygonflächen des Polytops, die } t \text{ Ecken haben.} \end{array}$$

Bitte wenden !!!

(a) Formulieren Sie 3 Formeln (ohne Beweise): die Eulersche Polyederformel; eine Formel, die k und das Tupel $(e_s)_{s\geq 3}$ verbindet; eine Formel, die k und das Tupel $(f_t)_{t\geq 3}$ verbindet.

(b) Die 5 platonischen Körper sind seit über 2000 Jahren bekannt. Jeder sollte sie kennen. Füllen Sie die folgende Tabelle aus. Es gibt jeweils nur ein s mit $e_s \neq 0$ und nur ein t mit $f_t \neq 0$.

s mit $e_s \neq 0$	t mit $f_t \neq 0$	$e = e_s$	k	$f = f_t$	
					Tetraeder
					Würfel = Hexaeder
					Oktaeder
					Dodekaeder
					Ikosaeder

(c) Aus dem Ikosaeder erhält man durch geeignetes Abschneiden von Umgebungen der Ecken das *abgestumpfte Ikosaeder*, ein *archimedisches Polytop*, dessen Polygonflächen regelmäßige Fünfecke und Sechsecke sind. Geben Sie f_5, f_6, k und alle s und e_s mit $e_s \neq 0$ an.

3. *(1+2+2+1 Punkte)* Die Menge der Punkte der *hyperbolischen Ebene* ist im *Poincaré-Modell*

$$\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}.$$

(a) Welche Kurven in $\mathbb{H}^2$ sind die *hyperbolischen Geraden*?

(b) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ mit $z_1 \neq z_2$. Wie ist der hyperbolische Abstand $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) \in \mathbb{R}_{>0}$ zwischen z_1 und z_2 definiert?

(c) Wie groß ist der Abstand $d_{\mathbb{H}}(i, t \cdot i)$ für ein $t \in \mathbb{R}_{>0}$?

(d) Geben Sie die Formel an, die bei einem hyperbolischen Dreieck Δ seine Fläche und die Summe der Innenwinkel verbindet.

4. *(4 Punkte)* Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$ eine C^∞-Kurve in der hyperbolischen Ebene. Ihre Länge ist

$$L(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))}\, dt.$$

Bemerkung: Der Beweis dieser Formel ist im Prinzip ähnlich zu Aufgabe 1, aber trickreicher. Sie brauchen ihn hier nicht zu führen.

γ ist eine *Geodätische* von $z_1 := \gamma(a)$ nach $z_2 := \gamma(b)$, falls sie unter allen Kurven von z_1 nach z_2 kürzeste Länge hat.

Im Fall von $z_1 = i, z_2 = r \cdot i$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>1}$ folgt aus der Formel oben relativ leicht, dass genau die Kurven γ von z_1 nach z_2 mit

$$\begin{aligned} \Re(\gamma)(t) &= 0\ \forall\, t, \text{ also } \mathrm{Bild}(\gamma) = \text{ Strecke von } i \text{ nach } r \cdot i \\ \text{und } \Im(\gamma)'(t) &> 0\ \forall\, t \end{aligned}$$

die kürzest mögliche Länge $\log(r)$ haben. Also ist die *Geodätische* von i nach $r \cdot i$ die Strecke von i nach $r \cdot i$, mit irgendeiner Parametrisierung γ mit $\Im(\gamma)'(t) > 0\ \forall\, t$.

Bitte wenden !!!

Leiten Sie daraus und aus Eigenschaften der Gruppe $PSL(2,\mathbb{R})$ der gebrochen linearen Transformationen, die $\mathbb{H}^2$ auf $\mathbb{H}^2$ abbilden, ab, dass für beliebige Punkte $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ mit $z_1 \neq z_2$ die *Geodätische* von z_1 nach z_2 das Kurvenstück zwischen z_1 und z_2 der (eindeutigen) hyperbolischen Geraden durch z_1 und z_2 ist.

5. *(4 Punkte)* (Hyperbolische Kreise) Sowohl im Poincaré-Modell als auch im Scheibenmodell ist ein *hyperbolischer Kreis* um einen Punkt z_0 die Menge aller Punkte der hyperbolischen Ebene, die einen festen hyperbolischen Abstand $r \in \mathbb{R}_{>0}$ zu z_0 haben.

   Aus der Symmetrie des Scheibenmodells folgt leicht, dass im Scheibenmodell die hyperbolischen Kreise um den Nullpunkt $z_0 = 0$ genau die euklidischen Kreise mit Mittelpunkt 0 und Radius $R < 1$ sind (das brauchen Sie nicht zu beweisen).

   Leiten Sie daraus und aus Eigenschaften der gebrochen linearen Transformationen ab, dass sowohl im Poincaré-Modell als auch im Scheibenmodell alle hyperbolischen Kreise euklidische Kreise sind (allerdings stimmen der hyperbolische Mittelpunkt z_0 und der euklidische Mittelpunkt fast nie überein; sie stimmen nur im Scheibenmodell im Fall $z_0 = 0$ überein).

6. *(2 Punkte)* Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Berechnen Sie für den hyperbolischen Kreis mit hyperbolischem Radius r und hyperbolischem Mittelpunkt $z_0 = i \in \mathbb{H}^2$ (also im Poincaré-Modell) den euklidischen Radius R und den euklidischen Mittelpunkt M.

   Bemerkung: Die Lösung erfordert die Lösung von Aufgabe 3 (c) und ist dann einfach.

7. *(2 Punkte)* Machen Sie eine Skizze, die folgendes enthält: den Rand S^1 des Scheibenmodells der hyperbolischen Ebene; eine hyperbolische Gerade G; einen Punkt $p \notin G$ in der Scheibe; die Familie der zu G parallelen hyperbolischen Geraden durch p (diese Familie können Sie natürlich nur andeuten).

Vorrechnen von Musterlösungen zu Blatt 5 in der Übung am 08.05.2014