

Übungsaufgaben zur Geometrie

Einige Abschnitte im Kapitel 1 des Buchs von Agricola und Friedrich werden in den Klausuren zur Vorlesung nicht als bekannt vorausgesetzt (es ist aber nicht ausgeschlossen, dass Teile als unbekannter Stoff in schwerere Aufgaben eingehen). Das sind folgende Abschnitte.

In 2.2.6 Bemerkung 6 zum Mittendreieck.

2.2.7 Die Euler'sche Gerade eines Dreiecks.

2.3.3 Der Feuerbach'sche Kreis eines Dreiecks.

2.3.4 Die Simson'sche und die erste Steiner'sche Gerade.

In 2.3.5 alles außer den Definitionen von Sehnenviereck und Tangentenviereck und den leichteren Teilen der Beweise ihrer Charakterisierungen in Satz 39 und Satz 40.

2.3.7 Der Satz von Ptolemaios über 4 Punkte auf dem Kreis.

In 2.4.4 alles ab Seite 59, d.h. ab Satz 59.

2.4.5. Eine Kurve höheren Grades.

1. (3 Punkte) Die zehnte Einheitswurzel $\zeta := e^{2\pi i/10}$ erfüllt $0 = \zeta^5 + 1 = (\zeta + 1)(\zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1)$, wegen $\zeta + 1 \neq 0$ also auch $0 = \zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1$. Und natürlich ist $\zeta + \zeta^{-1} = 2 \cos \frac{2\pi}{10}$.

Leiten Sie daraus eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$ ab, die von $2 \cos \frac{2\pi}{10}$ erfüllt wird. Rechnen Sie damit $2 \cos \frac{2\pi}{10}$ aus.

Bemerkungen: Wegen dieser Formel kann man das regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruieren. Die Zahl $2 \cos \frac{2\pi}{10}$ heißt goldener Schnitt.

2. (2 Punkte) Eine Ellipse ist eine Kurve

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

mit gewissen $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Im Fall $a > b$ hat sie zwei Paare (G_1, F_1) und (G_2, F_2) aus *Brenngeraden* G_i und *Brennpunkten* F_i . Die Punkte F_1 und F_2 liegen im Innern der Ellipse. Die Geraden G_1 und G_2 sind parallel und schneiden die Ellipse nicht. Die Brennpunkte und Brenngeraden haben folgende schöne Eigenschaften.

- (1) Für $i = 1, 2$ gilt: Für alle Punkte $P \in C$ ist das Verhältnis

$$\frac{|PF_i|}{\text{Abstand}(P, G_i)} \in \mathbb{R}_{>0}$$

dasselbe.

- (2) Bei allen Punkten $P \in C$ ist die Summe $|PF_1| + |PF_2|$ der Abstände zu den Brennpunkten gleich.

Bitte wenden !!!

- (3) Ein Lichtstrahl, der in F_1 startet und irgendwo auf C trifft und dort gemäß der physikalischen Regel *Eintrittswinkel = Austrittswinkel* reflektiert wird, geht durch F_2 . (Wegen dieser Eigenschaft heißen F_1 und F_2 Brennpunkte.)

Machen Sie sich für ein Zahlenpaar (a, b) mit $a > b$ mit einer Skizze, aber ohne Rechnung klar, wie ungefähr die Ellipse aussieht und wo ungefähr die Brennpunkte und die Brenngeraden liegen.

3. (4 Punkt) Eine Hyperbel ist eine Kurve

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

mit 2 Komponenten mit gewissen $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Auch sie hat zwei Paare (G_1, F_1) und (G_2, F_2) aus *Brenngeraden* G_i und *Brennpunkten* F_i . Die erfüllen die analoge Eigenschaft zu (1) oben.

- (a) Machen Sie sich mit einer Skizze, aber ohne Rechnung klar, wie ungefähr die Hyperbel aussieht und wo ungefähr die Brennpunkte und die Brenngeraden liegen.
(b) Raten Sie, welche Eigenschaft (2) ersetzt.
(c) Raten Sie, welche Eigenschaft (3) ersetzt.

4. (4 Punkte) Eine Parabel ist eine Kurve

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 2px = 0\}$$

für ein $p \in \mathbb{R}_{>0}$. Sie hat einen Brennpunkt und eine Brenngerade.

- (a) Machen Sie sich mit einer Skizze, aber ohne Rechnung klar, wie ungefähr die Parabel aussieht und wo ungefähr der Brennpunkt und die Brenngerade liegen.
(b) Raten Sie, welche Eigenschaft (2) ersetzt.
(c) Raten Sie, welche Eigenschaft (3) ersetzt.

5. (2 Punkte) Sei $C = L_1 \cup L_2 \subset \mathbb{R}^2$ die Vereinigung von zwei sich in 0 schneidenden Geraden. Die Menge C hat einen Brennpunkt und zwei Brenngeraden (der Brennpunkt bildet mit beiden Brenngeraden ein Paar).

Machen Sie sich mit einer Skizze, aber ohne Rechnung klar, wo Brennpunkt und Brenngeraden liegen. Werden (2) oder (3) durch etwas sinnvolles ersetzt?

Vorrechnen von Musterlösungen zu Teilen von Blatt 3 und Blatt 4 in den ersten 30 Minuten der Übung am 03.04.2014. In den hinteren 60 Minuten findet eine freiwillige anonyme Probeklausur statt.