Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI — Blatt 3
Prof. Dr. Claus Hertling — 12.03.2014

Übungsaufgaben zur Geometrie

1. *(2+1 Punkte)* Ein *Pythagoras-Tripel* ist ein Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ natürlicher Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$. Es heißt primitiv, falls $\operatorname{ggT}(a, b, c) = 1$ ist. Auf der Menge aller Pythagoras-Tripel wird folgende Äquivalenzrelation $\sim_P$ eingeführt:

$$(a, b, c) \sim_P (d, e, f) \iff \exists\, q \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ mit } (a, b, c) = (qd, qe, qf).$$

Man sieht leicht, dass es in jeder Äquivalenzklasse von Pythagoras-Tripeln genau ein primitives Pythagoras-Tripel gibt.

Folgende Abbildungen geben eine transparente Konstruktion aller (Äquivalenzklassen von) Pythagoras-Tripeln.

$$\begin{array}{ccccc}
\{\text{Pythagoras-Tripel}\}/\sim_P & \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} & S^1 \cap \mathbb{Q}^2_{>0} & \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} &]0,1[\cap\mathbb{Q}_{>0}, \\
[(a,b,c)] & \longmapsto & \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = (x, y) & \stackrel{f}{\longmapsto} & \frac{y}{1+x} \\
[(v^2-u^2, 2uv, u^2+v^2)] & \longleftarrow & \left(\frac{v^2-u^2}{u^2+v^2}, \frac{2uv}{u^2+v^2}\right) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) & \stackrel{g}{\longleftarrow} & \frac{u}{v} = t
\end{array}$$

   (a) Rechnen Sie nach, dass $f \circ g = \mathrm{id}$ und $g \circ f = \mathrm{id}$ ist.

   (b) Für welche $t \in]0,1[\cap\mathbb{Q}_{>0}$ ist das Pythagoras-Tripel $(v^2 - u^2, 2uv, u^2 + v^2)$ mit $t = \frac{u}{v}$ und $\operatorname{ggT}(u, v) = 1$ nicht primitiv? Was ist dann der ggT der 3 Zahlen?

2. *(4 Punkte)* Geben Sie 4 verschiedene Bedingungen dafür an, dass 2 Dreiecke kongruent sind. Bei den Bedingungen soll man nichts weglassen dürfen. Sie sollen als Gleichheit von gewissen Längen oder Winkeln formuliert sein. Machen Sie ohne Kommentar zu jeder Bedingung eine kleine, aber aussagekräftige Skizze.

3. *(2 Punkt)* Tragen Sie in der 2. Spalte der folgenden Tabelle in jeder der 4 Zeilen *ja, schwer* oder *ja, leicht* oder *nein* ein. Tragen Sie in der 3. Spalte in jeder der 4 Zeilen ein Minuszeichen oder *Inkreis* oder *Umkreis* ein. Die Tabelle soll danach stimmen.

Satz vom ...	Beweis mit dem Satz von Ceva?	Inkreis? Umkreis?
Winkelhalbierendenschnittpunkt		
Seitenhalbierendenschnittpunkt		
Höhenschnittpunkt		
Mittelsenkrechtenschnittpunkt		

Bitte wenden !!!

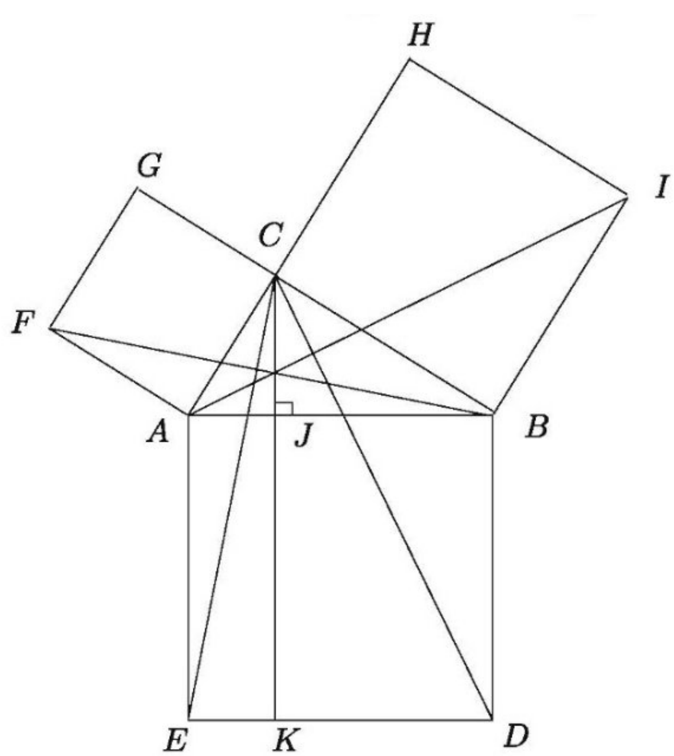
4. *(4 Punkte)* Formulieren und beweisen Sie den ersten Teil des Satz von Menelaos, und machen Sie eine Skizze dazu, für den Fall, wo die Gerade zwei Seiten des Dreiecks in ihrem Innern schneidet.

5. *(3 Punkte)* Gegeben seien ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ und ein Punkt P im Inneren des Dreiecks. Es werden die Geraden $G(A, P)$, $G(B, P)$ und $G(C, P)$ betrachtet. Die Schnittpunkte mit den gegenüberliegenden Seiten werden A', B' und C' genannt. Zeigen Sie

$$\frac{|AP|}{|AA'|} + \frac{|BP|}{|BB'|} + \frac{|CP|}{|CC'|} = 2.$$

Hinweis: Überraschenderweise hat die Aufgabe eine elegante Lösung, die das Verhältnis $|AP|/|AA'|$ mit dem Verhältnis der Flächen der Dreiecke $\Delta(P, B, C)$ und $\Delta(A, B, C)$ verknüpft.

6. *(3 Punkte)* Zum Beweis des Satzes von Pythagoras für das in C rechtwinklige Dreieck $\Delta(A, B, C)$ findet sich in Euklids Elementen folgende Zeichnung:

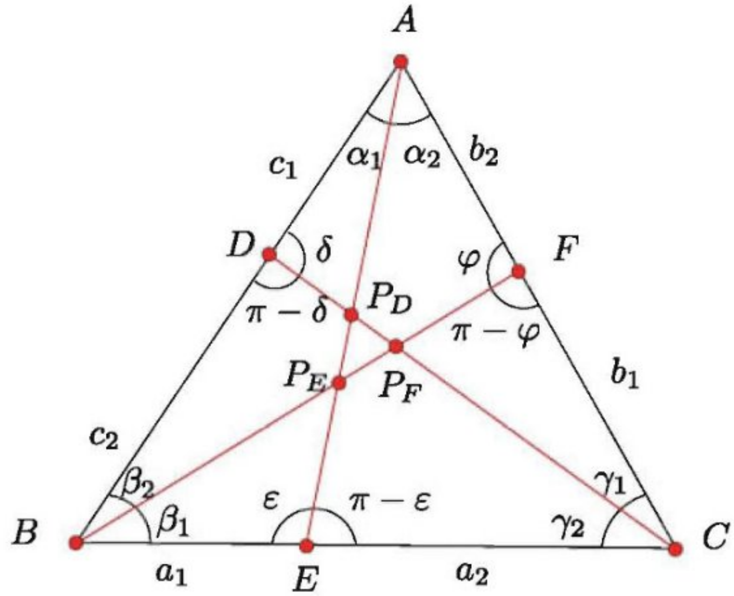


Wie lautet der daraufhin gegebene Beweis? Hinweis: Es reicht zu zeigen, dass die Flächen der Rechtecke $AJKE$ und $JBDK$ gleich b^2 bzw. a^2 sind (Begründung!). Um dies zu beweisen, bestimme man zwei Paare jeweils kongruenter Dreiecke und bestimme deren Fläche. Natürlich ist es nicht zulässig, einen der Sätze aus der Satzgruppe des Pythagoras zu verwenden!

Bitte wenden !!!

7. *(3 Punkte)* (Trigonometrische Form des Satzes von Ceva)

   Gegeben seien ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ und Punkte D, E und F auf den Kanten AB, BC und AC. Wir führen die Bezeichnungen im folgenden Bild ein:



   Man beweise, dass der Satz von Ceva unverändert gilt, wenn man die Relation (**) ersetzt durch

$$(**')\qquad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1.$$

   Hinweis: Man wende den Sinussatz auf die sechs Dreiecke $\Delta(A, B, E), \Delta(A, B, F), \Delta(A, C, E)$ usw. an und beweise damit Relationen des Typs

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{c}{b}.$$

8. *(2 Punkte)* Man beweise mit Hilfe der trigonometrischen Form des Satzes von Ceva, dass sich die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks immer in einem Punkt schneiden.

Vorrechnen von Musterlösungen zu Blatt 3 in der Übung am 20.03.2014