Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling Blatt 2
26.02.2014

# Übungsaufgaben zur Geometrie

1. *(1+1 Punkte)* Geben Sie je eine Formel für das Vektorprodukt $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ zu $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3) \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ und für das Spatprodukt $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}^t$ zu $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3) \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ an.

2. *(3 Punkte)* Beweisen Sie (ohne auf den Satz 1 in Kapitel 2.1 des Buchs zu verweisen, sondern mit einem ähnlichen Beweis) die korrigierte Fassung des Satzes 3, des orientierten Strahlensatzes:

   *Sind zwei Geraden $G_1, G_2$ mit Scheitel $G_1 \cap G_2 = \{S\}$ und zwei beliebige Geraden $G_1^*, G_2^*$ mit den Schnittpunkten*

   $$G_\alpha \cap G_1^* = \{P_\alpha\}, \quad G_\alpha \cap G_2^* = \{Q_\alpha\} \text{ für } \alpha = 1, 2$$

   *gegeben, so gilt für die Teil(ungs)verhältnisse*

   $$\frac{SP_1}{SQ_1} = \frac{SP_2}{SQ_2}$$

   *genau dann, wenn $G_1^*$ und $G_2^*$ parallel sind.*

3. *(1 Punkt)* Beweisen Sie die folgende Kürzungsformel für Teil(ungs)verhältnisse. Hier sind $P_1, P_2, P_3, P_4$ lauter verschiedene Punkte auf einer Geraden.

   $$\frac{P_1P_3}{P_1P_2} \cdot \frac{P_1P_4}{P_1P_3} = \frac{P_1P_4}{P_1P_2}.$$

4. *(2 Punkte)* Sei ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ gegeben. Beweisen Sie die Dreiecksungleichung

   $$a < b + c.$$

   Genauer: Zitieren Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für das Skalarprodukt im Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2$, definieren Sie ausgehend vom Skalarprodukt die Standardmetrik im $\mathbb{R}^2$, und beweisen Sie, dass die Standardmetrik tatsächlich die Dreiecksungleichung erfüllt.

5. *(2+2 Punkte)*

   (a) Formulieren und beweisen Sie eine der drei Gleichungen des Cosinussatzes.

   (b) Formulieren und beweisen Sie den Sinussatz. Beim Beweis dürfen Sie den Cosinussatz benutzen.

6. *(1+2 Punkte)*

   (a) Geben Sie Formeln für die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit Kantenlänge $a \in \mathbb{R}_{>0}$ im $\mathbb{R}^2$ und für die Fläche eines regelmäßigen Sechsecks der Kantenlänge $a \in \mathbb{R}_{>0}$ im $\mathbb{R}^2$ an (regelmäßiges Sechseck: alle Kanten haben die gleiche Länge $a$, alle Innenwinkel sind $\frac{2\pi}{3}$).

Bitte wenden !!!

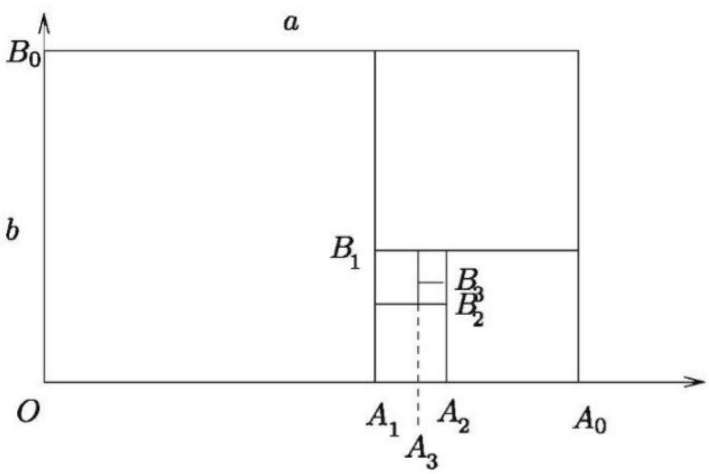
(b) Beweisen Sie unter Verwendung von (a) für ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ mit Winkeln $\alpha, \beta, \gamma$ und Kantenlängen $a, b, c$ und der Eigenschaft $\alpha = \frac{\pi}{3}$ folgende Formel für seine Fläche $S$,

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - (b-c)^2).$$

7. *(3 Punkte)* (**Weidenhalbierung**) Wir betrachten ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ sowie einen beliebigen Punkt $M$ auf der Seite $BC$. Man konstruiere elementargeometrisch einen Punkt $N$ auf einer der Seiten $AB$ oder $AC$ derart, dass die Strecke $MN$ das Dreieck $\Delta(A, B, C)$ in zwei gleich große Flächen unterteilt.

   Hinweis: Der Mittelpunkt $P$ von $BC$ hilft bei den Betrachtungen. Die Strecke $AP$ teilt das Dreieck in zwei gleich große Flächen.

8. *(3 Punkte)* Wir nehmen uns ein rechteckiges Stück Papier, dessen Kantenlängen $a, b$ zueinander im Verhältnis des goldenen Schnittes stehen, also $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$ erfüllen (ein solches Rechteck wird mitunter auch *golden* genannt). Wir legen das Papier mit seiner längeren Kante $a$ zu uns gerichtet auf den Tisch und schneiden *links* durch einen senkrechten Querschnitt das Quadrat weg, welches Kantenlänge $b$ hat. Von dem verbleibenden Papierstreifen schneiden wir - so, wie es liegt - *oben* das maximale Quadrat weg, und fahren im Uhrzeigersinn fort. Auf diesem Wege werden alle Punkte des Blattes *weggeschnitten*, bis auf einen (siehe Bild). Welche sind seine Koordinaten, wenn man den Koordinatenursprung in die linke untere Papierecke legt?




9. *(3 Punkte)* (**Satz von Sylvester und Gallei (1893 und 1944)**) Seien $n$ Punkte in der Ebene gegeben, die nicht kollinear sind. Beweisen Sie, dass eine Gerade existiert, auf der genau zwei dieser Punkte liegen.

   Hinweis: Betrachte unter allen Paaren $(P, G)$, bestehend aus einem der $n$ Punkte $P$ und einer durch mindestens zwei Punkte der Konfiguration verlaufenden Geraden $G$ mit $P \notin G$ dasjenige Paar $(P_0, G_0)$, für welches $P_0$ minimalen positiven Abstand zu $G_0$ hat.

**Vorrechnen von Musterlösungen zu Blatt 2 in der Übung am 06.03.2014**