Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling

Übungsaufgaben zur Geometrie

1. *(4+2 Punkte)* Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum, seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ zwei affine Unterräume mit $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$, und seien $p \in \mathcal{A}_1$ und $q \in \mathcal{A}_2$ beliebige Punkte. Zeigen Sie:

$$\begin{array}{rrcl} (i) & T(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) & = & (T(\mathcal{A}_1) + T(\mathcal{A}_2)) \oplus T(p \vee q). \\ (ii) & \dim(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) & = & \dim \mathcal{A}_1 + \dim \mathcal{A}_2 - \dim(T(\mathcal{A}_1) \cap T(\mathcal{A}_2)) + 1. \end{array}$$

Sie dürfen Lemma 1.9 und alles vor Lemma 1.3 (e) und auch die Dimensionsformel für Summen von Untervektorräumen eines Vektorraums benutzen.

2. *(3 Punkte)* Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum mit Körper K mit $\operatorname{char} K \neq 2$, und seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ affine Unterräume mit $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$. Dann ist

$$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = \bigcup_{(a,b) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} a \vee b.$$

3. *(1+1+1 Punkte)* K^n ist in dieser Vorlesung der Spaltenvektorraum $M(n \times 1, K)$ (und nicht der Zeilenvektorraum $M(1 \times n, K)$). Eine affine Abbildung $f : K^n \to K^m$ hat die Gestalt

$$f(x) = B \cdot x + b \quad \text{mit geeigneten } B \in M(m \times n, K),\ b \in K^m.$$

(a) Schreiben Sie $\begin{pmatrix} f(x) \\ 1 \end{pmatrix} \in K^{m+1}$ als Produkt einer geeigneten Matrix mit $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in K^{n+1}$.

(b) Sei $g : K^m \to K^l$ eine affine Abbildung mit $g(y) = C \cdot y + c$ mit $C \in M(l \times m, K),\ c \in K^l$. Dann ist auch $g \circ f : K^n \to K^l$ eine affine Abbildung. Berechnen Sie D und d, so dass $(g \circ f)(x) = D \cdot x + d$ ist.

(c) Schreiben Sie $\begin{pmatrix} (g \circ f)(x) \\ 1 \end{pmatrix} \in K^{l+1}$ als Produkt von 2 geeigneten Matrizen mit $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. *(2+2 Punkte)* Den Hauptsatz der affinen Geometrie kann man eleganter mit dem Begriff einer *semiaffinen Abbildung* fassen:

Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum mit $\dim \mathcal{A} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ und mit $|K| \geq 3$. Dann ist eine bijektive Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ genau dann eine Kollineation, wenn sie semiaffin ist.

Geben Sie zwei elegante Definitionen: Eine für eine *semilineare Abbildung* $f : V \to W$ zwischen zwei K-Vektorräumen, eine für eine *semiaffine Abbildung* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen zwei affinen Räumen über dem gleichen Körper K.

Bitte wenden !!!

5. *(1+2 Punkte)* Geben Sie ein Beispiel mit $\dim \mathcal{A} = 1 \& |K| \geq 3$ und ein Beispiel mit $\dim \mathcal{A} \geq 2 \& |K| = 2$ an, so dass es bei beiden Beispielen mehr Kollineationen als semiaffine bijektive Abbildungen gibt.

6. *(1+2 Punkte)*

   (a) Beweisen Sie, dass das Teilverhältnis invariant unter affinen Abbildungen ist.

   (b) Reduzieren Sie mit Hilfe der Invarianz des Teilverhältnisses unter affinen Abbildungen und mit Lemma 1.5 (d) folgende Aussage auf den Fall eines gleichseitigen Dreiecks:

   Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks im $\mathbb{R}^2$ schneiden sich in einem Punkt und teilen sich im Verhältnis 2:1.

7. *(2 Punkte)* Eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ sei durch die Gleichung $ax + by + c = 0$ gegeben, und $p = (x_0, y_0)$ sei ein weiterer Punkt der Ebene. Berechnen Sie den Abstand des Punktes zur Geraden.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Prüfungsmodalitäten, Literatur) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/14_FSS_geom.html`

zu finden.

Vorrechnen von Musterlösungen zu Blatt 1 in der Übung am 20.02.2014