Lösungsskizzen Blatt 6

Aufgabe 1:

a.) Alle abelschen Gruppen der Ordnung $128 = 2^7$ bis auf Isomorphie in Elementarteilerform:

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{32}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{16}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{64}$$

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$$

$$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{16}$$

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{32}$$

$$\mathbb{Z}_{128}$$

b.) Alle abelschen Gruppen der Ordnung $5400 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ bis auf Isomorphie in Elementarteilerform:

$$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{30}$$

$$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{150}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{90}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{450}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{270}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{1350}$$

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{540}$$

$$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{900}$$

$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{120}$$

$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{60}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{90}$$

$$\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{180}$$

$$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{1080}$$

$$\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{360}$$

$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{1800}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2700}$$

$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{600}$$

$$\mathbb{Z}_{5400}$$

c) Falls $1 < d_1 \mid d_2 \mid .... \mid d_k$ und $d_1 \cdots d_k = p_1 \cdots p_n$, so muss es ein p_i geben, das d_1 teilt (denn die p_i sind Primzahlen). Dieses p_i teilt auch $d_2, \ldots, d_k$ und damit teilt p_i^k die Zahl $p_1 \cdots p_n$. Das geht nach Voraussetzung nur, wenn $k = 1$ gilt ($p_1, \ldots, p_n$ sind paarweise verschieden). Also gibt es bis auf Isomorphie nur die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_{p_1 \cdots p_n}$ als abelsche Gruppe der Ordnung $p_1 \cdots p_n$ (vgl. 5.2.34).

Aufgabe 2:

a.) Mit Hilfe des chinesischen Restsatzes bringen wir die abelschen Gruppen in die Elementarteilerform:

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{48} & \cong & \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{720} \\
\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{180} \times \mathbb{Z}_{48} & \cong & \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{720} \\
\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{80} \times \mathbb{Z}_{9} \times \mathbb{Z}_{12} & \cong & \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{720} \\
\mathbb{Z}_{3} \times \mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{4} \times \mathbb{Z}_{9} \times \mathbb{Z}_{3} \times \mathbb{Z}_{16} & \cong & \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{3600} \\
\mathbb{Z}_{3} \times \mathbb{Z}_{3} \times \mathbb{Z}_{80} \times \mathbb{Z}_{4} \times \mathbb{Z}_{4} \times \mathbb{Z}_{45} & \cong & \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{720} \\
\mathbb{Z}_{300} \times \mathbb{Z}_{108} \times \mathbb{Z}_{16} & \cong & \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{3600}
\end{array}$$

Daher sind die abelschen Gruppen unter i.),ii.),iii.) und v.) zueinander isomorph und die abelschen Gruppen unter iv.) und vi.) sind zueinander isomorph.
Als Beispiel für eine solche Umrechnung in Elementarteilerform wird die Gruppe aus i.) vorgeführt, alle anderen Umrechnungen gehen analog:

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{48} & \cong & \mathbb{Z}_{3} \times \mathbb{Z}_{5} \times \mathbb{Z}_{4} \times \mathbb{Z}_{5} \times \mathbb{Z}_{4} \times \mathbb{Z}_{9} \times \mathbb{Z}_{3} \times \mathbb{Z}_{16} \\
& \cong & (\mathbb{Z}_{3} \times \mathbb{Z}_{4}) \times (\mathbb{Z}_{3} \times \mathbb{Z}_{4} \times \mathbb{Z}_{5}) \times (\mathbb{Z}_{5} \times \mathbb{Z}_{9} \times \mathbb{Z}_{16}) \\
& \cong & \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{720}
\end{array}$$

b.) Wir betrachten den folgenden surjektiven Ringhomomorphismus:

$$\varphi : \mathbb{Z}^k \longrightarrow \mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k} \text{ mit } (a_1, \ldots, a_k) \mapsto ([a_1]_{n_1}, \ldots, [a_k]_{n_k}).$$

Dann gilt nach dem Homomorphiesatz:

$$\mathbb{Z}^k / \ker(\varphi) \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}.$$

Der Untermodul $\ker(\varphi)$ von $\mathbb{Z}^k$ wird erzeugt von den Vektoren:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n_k \end{pmatrix}.$$

Daher stimmen die Elementarteiler von $\ker(\varphi)$ mit den Elementarteilern der Matrix A berein. Seien $a_1, \ldots, a_l$ mit $a_i \mid a_{i+1}$ die Nicht-Einheiten unter den Elementarteilern von A. Nach 5.2.25 gilt dann:

$$\mathbb{Z}^k / \ker(\varphi) \cong \mathbb{Z}_{a_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{a_l}.$$

Es folgt

$$G \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k} \cong \mathbb{Z}^k / \ker(\varphi) \cong Z_{a_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{a_l}.$$

Da aber auch gilt:

$$G \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{d_r}$$

folgt wegen der Eindeutigkeit der Elementarteilerdarstellung einer endlichen abelschen Gruppe (5.2.34), daß $r = l$ und $d_i = a_i$ für $i = 1, \ldots, r$, womit $d_1, \ldots, d_r$ genau die Nicht-Einheiten unter den Elementarteilern von A sind.

Aufgabe 3:

Die Matrizen der genannten Art werden aufgelistet. Es stellt sich heraus, dass es in $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{Z}_2)$ insgesamt genau 34 Konjugationsklassen gibt.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & p \end{pmatrix} \quad \text{mit } p \text{ vom Grad 4, dies liefert 16 Konjugationsklassen.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} \quad \text{mit } p \text{ vom Grad 2, dies liefert 4 Konjugationsklassen.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & p & \\ & & & pq \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mathrm{grad}(p) = 1,\ \mathrm{grad}(q) = 2, \text{ 8 Konjugationsklassen.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & pq \end{pmatrix} \quad \text{mit } p, q \text{ vom Grad 1, dies liefert 4 Konjugationsklassen.}$$

$$\begin{pmatrix} p & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} \quad \text{mit } p \text{ vom Grad 1, dies liefert 2 Konjugationsklassen.}$$

Aufgabe 4:

Es sei

$$p_i = \sum_{k=1}^{n_i} a_{k,i} t^i$$

Die Linksmultiplikation $l_t \colon M_i \longrightarrow M_i$ sei mit $l_t|M_i$ bezeichnet, $i = 1, ..., m$. Nach Aufgabe 1, Blatt 4 gilt unter den gemachten Voraussetzungen (siehe Hinweis):

$$A_i := [l_t|M_i]_{C_i,C_i} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & -a_{0,i} \\ 1 & 0 & & & & \vdots \\ & 1 & 0 & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & -a_{n_i-2,i} \\ & & & & 1 & -a_{n_i-1,i} \end{pmatrix}$$

Erläuterung dazu: Sei $\psi_i : K[t]/(p_i)_{K[t]} \cong M_i$ der gegebene $K[t]$-Modul-Isomorphismus. Dann gilt nach Konstruktion

$$v_{i,j} = \psi_i(t^{j-1} + (p_i)_{K[t]}), \quad j = 1, \ldots, n_i - 1.$$

Es folgt

$$(l_t|M_i)(v_{i,j}) = \psi_i(t^j + (p_i)_{K[t]}) = v_{i,j+1}, \quad j = 1, \ldots, n_i - 1.$$

und

$$(l_t|M_i)(v_{i,n_i}) = \psi_i(t^{n_i} + (p_i)_{K[t]}) = \psi_i \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} (-a_{j,i})(t^j + (p_i)_{K[t]} \right) = \sum_{j=1}^{n_i} (-a_{j,i}) v_{i,j}.$$

Daraus ergibt sich die Gestalt von $[l_t|M_i]_{C_i,C_i}$.

Da M als direkte Summe der l_t-invarianten Untermoduln M_i dargestellt ist, ist $[l_t]_{C,C}$ eine Blockdiagonalmatrix der Form:

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & A_{m-1} & \\ & & & & A_m \end{pmatrix} \text{ mit } \; A_i = [l_t|M_i]_{C_i,C_i} \text{ wie oben}$$