Blatt 5

(1)

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "id"] \arrow[d, "{[\ ]_C}"'] & V \arrow[d, "{[\ ]_B}"] \\ R^{[m]} \arrow[r, "\varphi_A"] & R^{[m]} \end{tikzcd}$$

$$[\ ]_B \circ id \circ [\ ]_C^{-1} = \varphi_A \qquad (*)$$

$$\Longleftrightarrow \quad [id]_{B,C} = A$$

a) $A = (a_{ij})$

$B = (b_1, \dots, b_m)$ gegeben

$C = (c_1, \dots, c_m)$ gesucht

$\mathcal{E}_m = (e_1, \dots, e_m)$ Standardbasis von $R^{[m]}$

$$c_i = [\ ]_C^{-1}(e_i)$$

$$\underset{(*)}{=} ([\ ]_B^{-1} \circ \varphi_A)(e_i) = [\ ]_B^{-1}(Ae_i)$$

$$= [\ ]_B^{-1}\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, b_j$$

Basis C : $\left(\sum_{j=1}^{m} a_{j1}\, b_j, \dots, \sum_{j=1}^{m} a_{jm}\, b_j \right)$

b) $C = (c_1, \dots, c_n)$ gegeben

$B = (b_1, \dots, b_n)$ gesucht

$X := A^{-1} = (x_{ij})$

$$b_i = [\ ]_B^{-1}(e_i) \underset{(*)}{=} ([\ ]_C^{-1} \circ \varphi_A^{-1})(e_i)$$

$$= ([\ ]_C^{-1} \circ \varphi_X)(e_i) = [\ ]_C^{-1} \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_{ji} \ c_j$$

Basis B : $\left(\sum_{j=1}^{n} x_{j1} \ c_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} x_{jn} \ c_j \right)$

mit $(x_{ij}) = A^{-1}$

Aufgabe 2:
Die Matrix A wird durch Zeilen- und Spaltenumformungen in Elementarteilergestalt gebracht. Erlaubt sind dabei Zeilen- und Spaltenvertauschungen sowie die Addition des Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte) und das Multiplizieren von Zeilen (Spalten) mit Einheiten. Verboten ist es eine Zeile bzw. Spalte mit einer Nichteinheit zu Multiplizieren. Um die Matrizen U und V zu bestimmen kann man so vorgehen dass man die jeweilige Einheitsmatrix links und rechts neben A schreibt und jede Zeilenumformung bei A auch auf der linken Seite sowie jede Spaltenumformung auf der rechten Seite durchführt. Ist dann A in Elementarteilerform überführt so stehen links und rechts davon die Matrizen U bzw. V mit $UAV =$ Elementarteilerform.
Dies wird nun in a) und b) durchgeführt.

a) Wir stellen die Umformungen in einer Tabelle dar:

$$
\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
-3 & -2 & 0 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\
-3 & -2 & 0 & 0 & -6 & 0 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \\
-3 & -2 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \\
-3 & -2 & 1 & 0 & 6 & 4 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \\
-3 & -2 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 4 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \\
-3 & -2 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 4 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \\
-3 & -2 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \\
-6 & -4 & 3 & 0 & 0 & 12 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 6 \\
-3 & -2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & -4 \\
-6 & -4 & 3 & 0 & 0 & 12 & 0 & -1 & 3 \\
\hline
\end{array}
$$

Es gilt also

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ -6 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

b) Wir stellen die Umformungen in einer Tabelle dar:

$$\begin{array}{cc|cc|cc}
1 & 0 & X^2-1 & X^3-1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & X^3-X & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & X^2-1 & X^3-1 & 1 & 0 \\
-X & 1 & 0 & X-X^4 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & X^2-1 & X-1 & 1 & -X \\
-X & 1 & 0 & X-X^4 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & X-1 & X^2-1 & -X & 1 \\
-X & 1 & X-X^4 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
1 & 0 & X-1 & 0 & -X & X^2+X+1 \\
-X & 1 & X-X^4 & (X^4-X)(X+1) & 1 & -X-1 \\
\hline
1 & 0 & X-1 & 0 & -X & X^2+X+1 \\
X^3+X^2 & 1 & 0 & (X^4-X)(X+1) & 1 & -X-1
\end{array}$$

Durchgeführte Umformungen:
1) X-mal die erste Zeile von der zweiten Zeile abziehen.
1) X-mal die erste Spalte von der zweiten Spalte abziehen.
3) Vertauschung der beiden Spalten
4) $X+1$-mal die erste Spalte von der zweiten Spalte abziehen.
5) X^3+X^2+X-mal die erste Zeile zur zweiten Zeile addieren
(beachte: $X^4-X = X(X-1)(X^2+X+1)$)

Es gilt also:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ X^3+X^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X^2-1 & X^3-1 \\ X^3-X & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -X & X^2+X+1 \\ 1 & -X-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X-1 & 0 \\ 0 & (X^4-X)(X+1) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: a) Eine Basis von N ist gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Umformung der Matrix mit diesen Vektoren als Spalten in die Elementarteilerform (siehe unten) ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man berechnet

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und findet in den Spalten der letzteren Matrix eine Elementarteilerbasis (b_1, b_2, b_3) von M bzgl. N, wobei gilt

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und es bilden $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis von N wie gewünscht.

Wir stellen noch die Umformungen in die Elementarteilerform in einer Tabelle dar (siehe nächste Seite).

Umformungen in die Elementarteilerform:

$$
\begin{array}{ccc|cc|cc}
1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 2 & & \\
\hline
0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 & & \\
\hline
0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 0 & 1 \\
1 & -2 & 0 & 0 & -8 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & -2 & & \\
\hline
0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
1 & -2 & 0 & 0 & -8 & 1 & -3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & -2 & & \\
\hline
0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & -3 \\
1 & -2 & 0 & 0 & -8 & & \\
\hline
0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & -3 \\
1 & 2 & -4 & 0 & 0 & & \\
\hline
0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\
1 & 2 & -4 & 0 & 0 & & \\
\hline
\end{array}
$$

b) Eine Basis von $\ker(\varphi)$ bilden $(1,1)$ und $(4,0)$, denn es gilt

$$
\begin{aligned}
[x-y]_4 = [0]_4 &\iff x = y + 4k \text{ mit einem } \ k \in \mathbb{Z} \\
&\iff (x,y) = y(1,1) + k(4,0) \text{ mit einem } \ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Nun wird eine Elementarteilerbasis von $\mathbb{Z}^2$ bzgl. $\ker(\varphi)$ berechnet. Dazu werden die Koordinaten der Basis von $\ker(\varphi)$ bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{Z}^2$ in die Spalten einer Matrix

$$
A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

geschrieben und die Matrix A wird in Elementarteilerform gebracht:

$$
\begin{array}{rr|rr|rr}
1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \\
-1 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\
-1 & 1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\
\hline
\end{array}
$$

Wir setzen

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$UAV = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir bilden

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten:

Elementarteilerbasis von $\mathbb{Z}^2$ bzgl. ker(φ):

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Basis von ker(φ):

$$\left(1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

(4) Wir bestimmen die Elementarteiler von $t \cdot E_2 - M$ für $M \in \{A, B, C, D\}$

$$t E_2 - A = \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ 1-t & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-t & -(1-t)(t-1) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2-2t+1 \end{pmatrix}$$

$$t E_2 - B = \begin{pmatrix} t+1 & -1 \\ 4 & t-3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & t+1 \\ 3-t & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3-t & 4-(t+1)(3-t) \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2-2t+1 \end{pmatrix}$$

$$t E_2 - C = \begin{pmatrix} t-2 & -1 \\ -3 & t-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2-t \\ 1-t & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-t & 3-(1-t)(2-t) \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -t^2+3t+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2-3t-1 \end{pmatrix}$$

$$tE_2 - D = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & t \\ t-2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t-2 & -1-t(t-2) \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -t^2+2t-1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2-2t+1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A, B, D sind zueinander konjugiert

C ist zu A, B, D nicht konjugiert