Blatt 4

① a) $l_t(1+I) = t + I$

$l_t(t+I) = t^2 + I$

$\vdots$

$l_t(t^{n-2}+I) = t^{n-1} + I$

$l_t(t^{n-1}+I) = t^n + I$

$$t^n = \frac{1}{a_n} p(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} t^i$$

$(a_n \neq 0$, da $\text{grad}(p) = n)$

$$\Rightarrow t^n + I = \sum_{i=0}^{n-1} \left(-\frac{a_i}{a_n}\right)(t^i + I)$$

$$\Rightarrow [l_t]_{B,B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & -\frac{a_1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & \ddots & 0 & -\frac{a_{n-2}}{a_n} \\ & 0 & & & 1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$$

b) $B = (1+I, t+I)$

$[l_t]_{B,B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $p(t) = t^2 + 0 \cdot t + 1$

(2) a) Sei $(a_1, \dots, a_k)$ eine Basis von $\ker(\varphi)$
und $(a_1, \dots, a_n)$ eine Basis von V

$U := \langle (a_{k+1}, \dots, a_n) \rangle$

$\Rightarrow V = \ker(\varphi) \oplus U$

und $(\varphi(a_{k+1}), \dots, \varphi(a_n))$ Basis von $\operatorname{im}(\varphi)$

somit ist $U \to \operatorname{im}(\varphi),\ x \mapsto \varphi(x)$
ein Isomorphismus und $U \cong \operatorname{im}(\varphi)$

b) Sei $B := (b_1, \dots, b_n) := (a_{k+1}, \dots, a_n, a_1, \dots, a_k)$

$\Rightarrow B$ Basis von V

a)

$C := (c_1, \dots, c_m) := (\varphi(a_{k+1}), \dots, \varphi(a_n), c_{n-k+1}, \dots, c_m)$

sei eine Basis von W, die durch
Ergänzung der Basis $(\varphi(a_{k+1}), \dots, \varphi(a_n))$
von $\operatorname{im}(\varphi)$ entsteht

$$\Rightarrow [\varphi]_{C,B} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei

$$r = n - k = \dim(V) - \dim \ker(\varphi)$$
$$= \dim(\operatorname{im}(\varphi)) = \operatorname{rg}(\varphi)$$

eindeutig durch φ bestimmt ist.

c)

$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad SAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

③ a) $\mathbb{Z} \times \{0\}$ Untergruppe von $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$

und $(n, m) \cdot (a, 0) = (na, 0)$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z} \times \{0\}$ ist $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-Untermodul

von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Wegen $(0, 1) \cdot (a, 0) = (0, 0)$ für alle $a \in \mathbb{Z}$

gibt es kein linear unabhängiges

Element $(a, 0)$ aus $\mathbb{Z} \times \{0\}$ und

somit auch keine Basis und

damit ist $\mathbb{Z} \times \{0\}$ kein freier

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-Modul

b) $M := \mathbb{Z}_6$ als $\mathbb{Z}_6$-Modul

$M_{Tor} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

denn $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{0}$

aber $\bar{a} \cdot \bar{1} \neq \bar{0} \neq \bar{a} \cdot \bar{5}$ für alle $\bar{a} \in \mathbb{Z}_6$

M_{Tor} ist kein Untermodul:

$\bar{4} + \bar{3} = \bar{1} \notin M_{Tor}$

c) Sei B eine Basis von I als R-Modul

Ann $|B| \geq 2$ $\Rightarrow \exists\, a, b \in B,\ a \neq b$

$ab - ba = 0 \Rightarrow a, b$ nicht lin. unabh.

Wid.

$\Rightarrow |B| = 1 \Rightarrow I = (a)_R$ Hauptideal

d) Zeige: $\ker(l_a) = \{0\}$ für $a \neq 0$

Sei $l_a(x) = 0 \Rightarrow ax = 0$ $(x \in M)$

Da M torsionsfrei ist, folgt wegen

$a \neq 0$ und $ax = 0$ sofort $x = 0$

$\Rightarrow \ker(l_a) = \{0\}$

4 a) $Ae_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1 \Rightarrow P_{e_1} = t - 2$

$Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A^2 e_2 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A^2 e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = +2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^2 e_2 - 2Ae_2 + 2e_2 = 0$

$\Rightarrow P_{e_2} = t^2 - 2t + 2$

$Ae_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 e_3 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A^2 e_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= 2Ae_3 - 2e_3$

$\Rightarrow P_{e_3} = t^2 - 2t + 2$

$\Rightarrow \mu_A = \mathrm{kgV}(t-2, t^2 - 2t + 2)$
$= (t-2)(t^2 - 2t + 2)$

b) $p \cdot x = 0$ für alle $x \in V_{\varphi_A}$

$\iff p \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{R}[t]}(V_{\varphi_A})$

$p \cdot x = p(\varphi_A)(x) = p(A)x$

$p(A)x = 0$ für alle $x \in V$

$\iff p(A) = 0$

Insgesamt ist

$\mathrm{Ann}_{\mathbb{R}[t]}(V_{\varphi_A}) = I_A = (\mu_A)_{\mathbb{R}[t]}$