Blatt 1

1 a) $[\varphi]_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -5 & 6 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

$S := [id]_{\mathcal{E}_3,B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow [id]_{B,\mathcal{E}_3} = S^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow [\varphi]_{B,B} = S^{-1} [\varphi]_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} S$

$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow [\varphi - 5\, id]_{B,B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $Eig(\varphi, 5) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

c) $W := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim W = 2$

$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \varphi(W) \subseteq W$

② a) Sei $x \in \mathbb{R}^3$

$\varphi^2 = 0 \Rightarrow \varphi^2(x) = 0$

$\Rightarrow \varphi(\varphi(x)) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \in \ker(\varphi)$

b) Da $\varphi \neq 0$ ist, existiert ein $b_3 \in \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(b_3) \neq 0$

$b_2 := \varphi(b_3) \neq 0$

$\overset{a)}{\Rightarrow} b_2 \in \ker(\varphi)$

Ergänze b_2 zu einer Basis (b_1, b_2) von $\ker(\varphi)$

(nach a) gilt $\operatorname{im}(\varphi) \subseteq \ker(\varphi)$ und wegen $3 = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{im}(\varphi))$ folgt $\dim \ker(\varphi) = 2$ und $\dim(\operatorname{im}(\varphi)) = 1$)

$B := (b_1, b_2, b_3)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$

($\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = 0$

$\Rightarrow \varphi(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3) = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 \underbrace{\varphi(b_1)}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{\varphi(b_2)}_{=0} + \alpha_3 \underbrace{\varphi(b_3)}_{\neq 0} = 0$

$\Rightarrow \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$)

$[\varphi]_{B,B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ denn $\varphi(b_1) = \varphi(b_2) = 0$, $\varphi(b_3) = b_2$

c) 0 einziger Eigenwert von φ, $\dim \operatorname{Eig}(\varphi, 0) = 2$

$\Rightarrow \varphi$ nicht diagonalisierbar

③ a) $\Rightarrow$ b) : $B = CAC^{-1}$

$$\Rightarrow \quad B^k = CAC^{-1}CAC^{-1}CAC^{-1} \dots CAC^{-1}$$

$$= CA^kC^{-1} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

b) $\Rightarrow$ a) : Wähle $k = 1$

a) $\Rightarrow$ c) : $B = CAC^{-1}$

$$P = \sum_{i=0}^{m} a_i t^i \Rightarrow C\,P(A)\,C^{-1} = C\left(\sum_{i=0}^{m} a_i A^i\right) C^{-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} a_i C A^i C^{-1} = \sum_{i=0}^{m} a_i B^i = P(B)$$

c) $\Rightarrow$ d) Wähle $P = t - \lambda$

d) $\Rightarrow$ a) Wähle $\lambda = 0$

④ a) $\varphi(a+b)(x) = (a+b)x = ax + bx$

$= \varphi(a)(x) + \varphi(b)(x) = (\varphi(a) + \varphi(b))(x)$

$\Rightarrow \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

$\varphi(ab)(x) = (ab)x = a(bx)$

$= \varphi(a)(\varphi(b)(x)) = (\varphi(a) \circ \varphi(b))(x)$

$\Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$

$\varphi(1_R)(x) = 1_R \cdot x = x \Rightarrow \varphi(1_R) = id_M$

$\Rightarrow \varphi$ Ringhomomorphismus mit $\varphi(1_R) = id_M$

b) V1) $1_R \cdot x = \varphi(1_R)(x) = id_M(x) = x$

V2) $a(x+y) = \varphi(a)(x+y)$

$= \varphi(a)(x) + \varphi(a)(y)$

$= ax + ay$

V3) $(a+b)x = \varphi(a+b)(x) = (\varphi(a) + \varphi(b))(x)$

$= \varphi(a)(x) + \varphi(b)(x) = ax + bx$

V4) $(ab)x = \varphi(ab)(x) = (\varphi(a) \circ \varphi(b))(x)$

$= \varphi(a)(\varphi(b)(x)) = a(bx)$

<u>Bem zu a)</u>

Wegen V2) gilt $\varphi(a) \in End(M)$

für alle $a \in R$: $\varphi(a)(x+y) = a(x+y)$

$= ax + ay$

$= \varphi(a)(x) + \varphi(a)(y)$