Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum 24.05.2013

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1: Euklidischer Algorithmus (1+1+1+1 Punkte)
Bestimmen Sie mit dem euklidischen Algorithmus jeweils den ggT der angegebenen Elemente, und stellen Sie ihn mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus als ganzzahlige Linearkombination derselben dar:

a.) $643,\ 627 \in \mathbb{Z}$.
b.) $1272,\ 912 \in \mathbb{Z}$.
c.) $t^5 + t^4 + t^2 + 2t + 1,\ t^3 + 1 \in \mathbb{Q}[t]$.
d.) $t^3 + 2t^2 + t + 1,\ t^2 + 5 \in \mathbb{Z}_7[t]$.

Aufgabe 2: Ringe (1+1+2 Punkte)

a.) Die folgende Menge ist ein Unterring der komplexen Zahlen:
$$\mathbb{Z}[\sqrt{-13}] := \{a + b\sqrt{-13} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$
Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ kein euklidischer Ring ist, indem Sie folgende Gleichung verwenden:
$$2 \cdot 7 = (1 + \sqrt{-13})(1 - \sqrt{-13}).$$
Geben Sie in $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ ein irreduzibles Element an, das kein Primelement ist.

b.) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, daß K ein euklidischer Ring ist. Welche Abbildungen $K \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ können als Gradfunktion verwendet werden? Welche Ideale gibt es in K?

c.) Sei R ein euklidischer Ring mit der Gradfunktion $\nu\colon R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie: Jedes Element $b \neq 0$ aus R, dessen Grad $\nu(b)$ minimal ist, ist eine Einheit.
Zeigen Sie anhand eines Beispiels, daß es Einheiten von R geben kann, deren Grad nicht minimal ist.

Bitte wenden

Aufgabe 3: chinesischer Restsatz, Elementarteiler (1+1+2 Punkte)

a.) Bestimmen Sie ein Urbild von $\Big([3]_4,\ [2]_5,\ [1]_7\Big)$ für folgenden Ringhomomorphismus:

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_{140} \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \quad \text{mit} \quad [a]_{140} \mapsto \Big([a]_4,\ [a]_5,\ [a]_7\Big).$$

b.) Bestimmen Sie $S, T \in GL_2(\mathbb{Z})$, so daß gilt:

$$S \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix}.$$

c.) Gegeben sei der folgende Untermodul N des $\mathbb{Z}$-Moduls $M = \mathbb{Z}^4$:

$$N := \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 22 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Bestimmen Sie eine Elementarteilerbasis von M bzgl. N, und zeigen Sie, daß gilt:

$$M/N \cong \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6.$$

Aufgabe 4: Torsion (2+1+1 Punkte)

a.) Bestimmen Sie für die folgenden R-Moduln M jeweils M_{Tor}:

i) $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$-Modul,

ii) $M = \mathbb{Z}_n$ als $\mathbb{Z}_n$-Modul,

iii) $M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ als $\mathbb{Z}$-Modul,

iv) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ als $\mathbb{Z}$-Modul.

b.) Sei R ein Integritätsring und $\varphi\colon M \longrightarrow N$ ein R-Modulhomomorphismus.
Zeigen Sie:

$$N \text{ frei} \quad \Longrightarrow \quad M_{\text{Tor}} \subseteq \ker(\varphi).$$

c.) Sei R ein Integritätsring und $\varphi\colon M \longrightarrow N$ ein R-Modulhomomorphismus.
Zeigen Sie:

$$\varphi \text{ injektiv} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Ann}_R(x) = \mathrm{Ann}_R\Big(\varphi(x)\Big) \quad \text{für alle} \quad x \in M.$$

Es geht noch weiter

Aufgabe 5: Minimalpolynome (2+2 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden beiden Matrizen aus $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$ jeweils das Minimalpolynom:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: Rationale Normalform (1+1+1+1 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$ jeweils die rationale Normalform:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$C := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7: Konjugationsklassen von 2×2-Matrizen (4+8 Punkte)

Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$ mit $A \neq \lambda \cdot E_2$ für alle $\lambda \in K$. Dann stimmt das charakteristische Polynom χ_A von A mit dem Minimalpolynom μ_A von A überein und $\chi_A = \mu_A$ ist der einzige Elementarteiler von $t \cdot E_2 - A$. Somit sind also zwei (2×2)-Matrizen über K, die beide kein Vielfaches von E_2 sind, genau dann konjuguert, wenn sie das gleiche charakteristische Polynom haben. Im folgenden sollen Sie diesen Sachverhalt ausnutzen, um die Konjugationsklassen von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}_2)$ und die Konjugationsklassen von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}_3)$ zu bestimmen. Suchen Sie dazu zu jedem möglichen charakteristischen Polynom alle Matrizen, die dieses charakteristische Polynom haben und kein Vielfaches von E_2 sind. Beachten Sie, daß das charakteristische Polynom einer (2×2)-Matrix A die Form hat

$$\chi_A = t^2 - \mathrm{sp}(A) \cdot t + \det(A).$$

a.) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}_2)$,

b.) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}_3)$.

Abgabe am Freitag, 31.05.2013, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.