Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI 17.05.2013
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1: Endliche abelsche Gruppen I (1+1+2 Punkte)

a.) Geben Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 128 an.

b.) Geben Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 5400 an.

c.) Zeigen Sie: Sind $p_1, \ldots, p_n$ paarweise verschiedene Primzahlen, so gibt es bis auf Isomorphie genau eine abelsche Gruppe mit $p_1 \cdots p_n$ Elementen.

Aufgabe 2: Endliche abelsche Gruppen II (3+1 Punkte)

a.) Welcher der folgenden abelschen Gruppen sind isomorph?

i.) $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{48}$,

ii.) $\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{180} \times \mathbb{Z}_{48}$,

iii.) $\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{80} \times \mathbb{Z}_{9} \times \mathbb{Z}_{12}$,

iv.) $\mathbb{Z}_{3} \times \mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{4} \times \mathbb{Z}_{9} \times \mathbb{Z}_{3} \times \mathbb{Z}_{16}$,

v.) $\mathbb{Z}_{3} \times \mathbb{Z}_{3} \times \mathbb{Z}_{80} \times \mathbb{Z}_{4} \times \mathbb{Z}_{4} \times \mathbb{Z}_{45}$,

vi.) $\mathbb{Z}_{300} \times \mathbb{Z}_{108} \times \mathbb{Z}_{16}$.

b.) Sei G eine endliche abelsche Gruppe und seien $n_1, \ldots n_k$ natürliche Zahlen mit

$$G \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}.$$

Nach dem Klassifikationssatz 5.2.33. gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $d_1, \ldots, d_r$ mit $d_1 \geq 2$ und $d_i \mid d_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, r-1$, so daß gilt:

$$G \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{d_r}.$$

Sei A die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $n_1, \ldots, n_k$:

$$A := \begin{pmatrix} n_1 & & \\ & \ddots & \\ & & n_k \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: $d_1, \ldots, d_r$ sind genau die Nicht-Einheiten unter den Elementarteilern von A.

Hinweis: Sie können Teil a) mit Hilfe von Teil b) lösen. Im allgemeinen ist dies aber aufwendiger als eine Lösung, die den chinesischen Restesatz verwendet.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Konjugationsklassen (4 Punkte)
In Aufgabe 4 von Blatt 5 wurde schon verwendet, daß über einem Körper K gilt:

$$A, B \in \mathrm{Mat}_n(K) \text{ sind konjugiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} t \cdot E_n - A \text{ und } t \cdot E_n - B \text{ haben die} \\ \text{gleichen Elementarteiler.} \end{array}$$

Damit lassen sich Konjugationsklassen von $\mathrm{Mat}_n(K)$ beschreiben durch $(n \times n)$-Matrizen aus $\mathrm{Mat}_n\big(K[t]\big)$ der Form:

$$\begin{pmatrix} p_1 & & & & & \\ & p_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & p_k & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad p_i \in K[t] \text{ normiert und } p_i \mid p_{i+1}.$$

Tatsächlich kommen noch zwei Bedingungen an solche Matrizen hinzu, die dann eine eindeutige Beschreibung der Konjugationsklassen erlauben:

- $k = n$, d.h. auf der Diagonalen stehen keine Nullen.
- Der Grad des Produktes $p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ ist n.

Bestimmen Sie so für den Fall $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{Z}_2)$ die Anzahl der Konjugationsklassen, in dem Sie alle (4×4)-Diagonalmatrizen bestimmen der Form:

$$\begin{pmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & p_3 & \\ & & & p_4 \end{pmatrix} \text{ mit } p_i \in \mathbb{Z}_2[t] \text{ normiert, } p_i \neq 0,\ p_i \mid p_{i+1} \text{ und } \mathrm{grad}(p_1 \cdots p_4) = 4.$$

Aufgabe 4: Direkte Summen (4 Punkte)

Sei K ein Körper und seien $p_1, \ldots, p_m \in K[t]$ normierte Polynome vom Grad $n_i \geq 1$. Weiter sei M ein $K[t]$-Modul, in dem es Untermoduln $M_i \subseteq M$ gibt, so daß gilt:

$$M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i \quad \text{und} \quad M_i \cong K[t]/(p_i)_{K[t]} \quad \text{als } K[t]\text{-Moduln} \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

$K[t]/(p_i)_{K[t]}$ ist ein K-Vektorraum mit der Standardbasis aus Aufgabe 4, Blatt 2:

$$B_i := \big(1 + (p_i)_{K[t]},\ t + (p_i)_{K[t]}, \ldots,\ t^{n_i - 1} + (p_i)_{K[t]}\big).$$

Durch den Isomorphismus $M_i \cong K[t]/(p_i)_{K[t]}$ korrespondiert die Basis B_i zu einer Basis $C_i = (v_{i,1}, \ldots, v_{i,n_i})$ des K-Vektorraums M_i. Nach Lemma 5.2.6. ist das System C, welches aus den Basen $C_1, \ldots, C_m$ zusammengesetzt ist, eine Basis von M.
Geben Sie die Matrix der Linksmultiplikation $l_t \colon M \longrightarrow M$ mit t bzgl. der Basis C an, d.h. $[l_t]_{C,C}$.
Hinweis: Wegen $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_m$ und $M_i \cong K[t]/(p_i)_{K[t]}$ sind die M_i alle l_t-invariant, und die Linksmultiplikation mit t in $K[t]/(p_i)_{K[t]}$

$$l_t \colon K[t]/(p_i)_{K[t]} \longrightarrow K[t]/(p_i)_{K[t]} \quad \text{mit} \quad q + (p_i)_{K[t]} \mapsto (t \cdot q) + (p_i)_{K[t]}$$

korrespondiert durch den Isomorphismus von $K[t]$-Moduln $M_i \cong K[t]/(p_i)_{K[t]}$ zur Linksmultiplikation $l_t \colon M_i \longrightarrow M_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Abgabe am Montag, 27.05.2013, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001