Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum 10.05.2013

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1: Basiswechsel (2+2 Punkte)
Es seien R ein kommutativer Ring mit Eins, V ein freier R-Modul vom Rang m und $A \in \mathrm{GL}_m(R)$. Zeigen Sie:

a.) Ist eine Basis B von V gegeben, so gibt es eine Basis C von V mit $[\mathrm{id}]_{B,C} = A$.
b.) Ist eine Basis C von V gegeben, so gibt es eine Basis B von V mit $[\mathrm{id}]_{B,C} = A$.

Aufgabe 2: Elementarteilersatz für Matrizen (2+2 Punkte)
a.) Bestimmen Sie $U, V \in GL_3(\mathbb{Z})$, so daß gilt:

$$U \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

b.) Bestimmen Sie $U, V \in GL_2(K[X])$, so daß gilt:

$$U \cdot \begin{pmatrix} X^2 - 1 & X^3 - 1 \\ X^3 - X & 0 \end{pmatrix} \cdot V = \begin{pmatrix} X - 1 & 0 \\ 0 & (X^4 - X)(X + 1) \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden

Aufgabe 3: Elementarteilersatz für Untermoduln (2+2 Punkte)

a.) Gegeben sei der folgende Untermodul N des $\mathbb{Z}$-Moduls $M = \mathbb{Z}^3$:

$$N := \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Bestimmen Sie eine Elementarteilerbasis von M bzgl. N (Definition 5.2.21).

b.) Gegeben sei der folgende $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus:

$$\varphi\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \quad \text{mit} \quad (x, y) \mapsto [x - y]_4.$$

Bestimmen Sie eine Elementarteilerbasis von $\mathbb{Z}^2$ bzgl. $\ker(\varphi)$ (Definition 5.2.21).

Aufgabe 4: Konjugierte Matrizen, Polynomelementarteiler (4 Punkte)

Ein Hauptergebnis der Vorlesung wird sein, daß über einem Körper K gilt:

$A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ sind konjugiert $\iff$ $t \cdot E_n - A$ und $t \cdot E_n - B$ haben die gleichen Elementarteiler.

Benutzen Sie dieses Kriterium, um zu entscheiden, welche der folgenden Matrizen aus $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ konjugiert sind:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Abgabe am Freitag, 17.05.2013, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001 oder am Dienstag, 21.05.2013, vor der Übung im Hörsaal A5 C013.